ДЕПАРТАМЕНТ ОБРАЗОВАНИЯ БЕЛГОРОДСКОЙ ОБЛАСТИ
Областное государственное автономное профессиональное образовательное учреждение
«СТАРООСКОЛЬСКИЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ»
(ОГАПОУ СПК)

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

ЕН.01 МАТЕМАТИКА

для студентов специальности 09.02.05 Прикладная информатика
(по отраслям)

Старый Оскол

Методические рекомендации по выполнению практических работ по учебной дисциплине «Математика» разработаны в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом (далее – ФГОС) по специальности 09.02.05 Прикладная информатика (по отраслям) среднего профессионального образования (далее СПО) и предназначены для студентов второго курсоа очной формы обучения.

Разработчик:
Анисимова В.И., преподаватель математики ОГАПОУ СПК

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА 4
КАРТА ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ 5
СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ 7
Практическая работа №1 «Действия над векторами» 7
Практическая работа №2 «Линейная зависимость векторов» 8
Практическая работа №3 «Различные уравнения прямой на плоскости. Взаимное расположение двух прямых» 13
Практическая работа №4 «Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой» 18
Практическая работа №5 «Плоскость в пространстве» 20
Практическая работа №6 «Прямая в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве» 23
Практическая работа №7 «Решение задач на нахождение канонического уравнения эллипса, гиперболы и параболы и их исследование» 25
Практическая работа №8 «Вычисление определителей третьего порядка различными способами» 28
Практическая работа №9 «Операции над матрицами, их свойства» 31
Практическая работа №10 «Решение систем линейных уравнений методом Гаусса» 33
Практическая работа №11 «Запись и решение системы n-линейных уравнений в матричной форме. Правило Крамера» 36
Практическая работа №12 «Векторное и смешанное произведения векторов» 42
Практическая работа №13 «Итерационные методы решения нелинейных уравнений» 46
Практическая работа №14 «Использование интерполяционных многочленов Лагранжа и Ньютона при решении задач» 54
Практическая работа №15 «Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах» 57
Практическая работа №16 «Решение задач на вычисление предела последовательности» 59
Практическая работа №17 «Решение задач на вычисление пределов. Непрерывность функции» 63
Практическая работа №18 «Вычисление производных с использованием правил дифференцирования» 81
Практическая работа №19 «Производные высших порядков. Обыкновенные дифференциальные уравнения» 86
Практическая работа №20 «Дифференциальные уравнения первого порядка» 87
Практическая работа №21 «Решение задач на вычисление первообразной и неопределённого интеграла» 91
Практическая работа №22 «Решение задач на вычисление определённого интеграла. Применение формулы Лейбница для вычисления определённых интегралов» 96
Практическая работа №23 «Решение задач на применение формул комбинаторики» 98
Практическая работа №24 «Случайные события. Методы вычисления вероятностей» 100
Практическая работа №25 «Выборка и её представление. Статистическое оценивание» 107
КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ РАБОТ 117
ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ИСТОЧНИКОВ 118

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Практическое занятие - это форма организации учебного процесса, предполагающая выполнение обучающимися по заданию и под руководством преподавателя одной или нескольких практических работ.

Дидактическая цель практических работ - формирование у обучающихся профессиональных умений, а также практических умений, необходимых для изучения последующих учебных дисциплин, а также подготовка к применению этих умений в профессиональной деятельности.

Так, на практических занятиях по математике у обучающихся формируется умение решать задачи, которое в дальнейшем должно быть использовано для решения профессиональных задач по специальным дисциплинам.

В ходе практических работ обучающиеся овладевают умениями пользоваться информационными источниками, работать с нормативными документами и инструктивными материалами, справочниками, выполнять чертежи, схемы, таблицы, решать разного рода задачи, делать вычисления.

Задачи, которые решаются в ходе практических занятий по математике:

1) расширение и закрепление теоретических знаний по математике, полученных в ходе лекционных занятий;

2) формирование у обучающихся практических умений и навыков, необходимых для успешного решения задач по математике;

3) развитие у обучающихся потребности в самообразовании и совершенствовании знаний и умений в процессе изучения математики;

4) формирование творческого отношения и исследовательского подхода в процессе изучения математики;

5) формирование профессионально-значимых качеств будущего специалиста и навыков приложения полученных знаний в профессиональной сфере.

КАРТА ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

Тема курса	Практическая работа
Тема 2.1. Векторы. Линейные операции над векторами	Практическая работа №1 «Действия над векторами»
	Практическая работа №2 «Линейная зависимость векторов»
Тема 2.2.Прямая линия на плоскости	Практическая работа №3 «Различные уравнения прямой на плоскости. Взаимное расположение двух прямых»
	Практическая работа №4 «Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой»
Тема 2.3 Прямая и плоскость в пространстве	Практическая работа №5 «Плоскость в пространстве»
	Практическая работа №6 «Прямая в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве»
Тема 2.4 Кривые второго порядка	Практическая работа №7 «Решение задач на нахождение канонического уравнения эллипса, гиперболы и параболы и их исследование»
Тема 3.1 Определители.	Практическая работа №8 «Вычисление определителей третьего порядка различными способами»
Тема 3.2 Матрицы. Операции над матрицами, их свойства	Практическая работа №9 «Операции над матрицами, их свойства»
Тема 3.3 Решение систем линейных уравнений	Практическая работа №10 «Решение систем линейных уравнений методом Гаусса»
	Практическая работа №11 «Запись и решение системы n-линейных уравнений в матричной форме. Правило Крамера»
	Практическая работа №12 «Векторное и смешанное произведения векторов»
Тема 4.1 Численные методы алгебры	Практическая работа №13 «Итерационные методы решения нелинейных уравнений»
Тема 4.2 Численные методы в теории приближений	Практическая работа №14 «Использование интерполяционных многочленов Лагранжа и Ньютона при решении задач»
Тема 5.1 Введение в математический анализ	Практическая работа №15 «Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах»
	Практическая работа №16 «Решение задач на вычисление предела последовательности»
Тема 5.2 Предел и непрерывность функции действительной переменной	Практическая работа №17 «Решение задач на вычисление пределов. Непрерывность функции»
Тема 5.3 Дифференциальное исчисление	Практическая работа №18 «Вычисление производных с использованием правил дифференцирования»
	Практическая работа №19 «Производные высших порядков. Обыкновенные дифференциальные уравнения»
	Практическая работа №20 «Дифференциальные уравнения первого порядка»
Тема 5.4 Интегральное исчисление	Практическая работа №21 «Решение задач на вычисление первообразной и неопределённого интеграла»
	Практическая работа №22

	«Решение задач на вычисление определённого интеграла. Применение формулы Лейбница для вычисления определённых интегралов»
Тема 6.1 Элементы комбинаторики	Практическая работа №23 «Решение задач на применение формул комбинаторики»
Тема 6.2 Элементы теории вероятностей	Практическая работа №24 «Случайные события. Методы вычисления вероятностей»
Тема 6.3 Методы математической статистики	Практическая работа №25 «Выборка и её представление. Статистическое оценивание»

СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

Практическая работа №1
«Действия над векторами»

Цель: формирование навыков выполнения операций над векторами и вычисления модуля и скалярного произведения векторов.

Теоретические сведения

Отрезок называется *направленным*, если один из его концов считается началом отрезка, а другой – его концом.

Вектором называется направленный отрезок. Вектор, заданной парой $(A; B)$ несовпадающих точек, обозначается символом $\overline{AB}$. Точка A называется *началом*, а точка B - *концом* вектора.

Расстояние $|\overline{AB}|$ называется диной (модулем) вектора $\overline{AB}$.

Вектор $\overline{AA}$, концы которого совпадают, называется *нулевым вектором*. Длина нулевого вектора равна нулю.

Два вектора называются *коллинеарными*, если они лежат на одной или на параллельных прямых. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними: $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\left(\vec{a},\,\hat{}\,\vec{b}\right)$.

Скалярное произведение векторов $\vec{a} = (x_1; y_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2)$ выражается *через* их *координаты* по формуле $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$.

Угол между двумя векторами $\vec{a} = (x_1; y_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2)$ находится по формуле $\cos\left(\vec{a},\,\hat{}\,\vec{b}\right) = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$.

Если отрезок AB разделен точкой C в отношении $AC:CB = \lambda$, то координаты точки C находятся по формулам

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda},\ y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}.$$

Если $\lambda = 1$, то получаются формулы для нахождения координат середины отрезка:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2},\ y_C = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Пример

Задание: Отрезок, концы которого A(-11;1) и B(9;11), разделен в отношении 2:3:5 (от A к B). Найти точки деления.

Решение: Обозначим точки деления от A к B через C и D. По условию $x_A = -11$, $x_B = 9$, $y_A = 1$, $y_B = 11$ и AC:CD:DB=2:3:5. тогда C делит AB в отношении $\lambda = \dfrac{AC}{CB} = \dfrac{2}{3+5} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$; значит $x_C = \dfrac{-11 + \left(1/4\right)\cdot 9}{1 + 1/4} = -7$; $y_C = \dfrac{1 + \left(1/4\right)\cdot 11}{1 + 1/4} = 3$; таким образом точка C имеет координаты (-7;3).

Точка D служит серединой AB, поэтому $x_D = \frac{-11+9}{2} = -1$; $y_D = \frac{1+11}{2} = 6$. Тогда D(-1;6).

Задания

1. Найдите координаты вектора AB, если $A(-2;-3)$, $B(1;4)$.
2. Точка $C(2;3)$ делит AB в отношении 1:4 (от A к B). Найдите точку A, если B(-6;-1).
3. Найдите точку M, равноудаленную от осей координат и от данной точки A(4;-2).
4. Вычислите угол между векторами $\bar{a} = (-3;4)$ и $\bar{b} = (4;3)$.
5. Даны векторы $\bar{a} = (2;3;-1)$, $\bar{b} = (0;1;4)$ и $\bar{c} = (1;0;-3)$. Определите координаты вектора: а) $2a - b - 2c$;
   б) $a - b - 3c$.
6. Найдите скалярное произведение векторов $\bar{a} = (2;4)$ и $\bar{b} = (4;1)$.
7. Вычислите k и l, если:
   1) $3i + 5j = ki + (2l+1)\cdot j$;
   2) $(k+l-1)\cdot i = (2k-l)\cdot j$;
   3) $(2k-l-1)\cdot i - (3k+l+10)\cdot j = 0$;
   4) $ki + lj = (l+1)\cdot i - (k-1)\cdot j$.
8. Найдите скалярное произведение векторов:
   1) $i - 2j + k$ и $2i + k$;
   2) $2j + 3k$ и $i - j - 2k$;
   3) $2i - j - k$ и $4i - 3j + 5k$;
   4) $6i + 4k$ и $2i - j$.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение вектора.
2. Что понимается под длиной или модулем вектора?
3. Какие векторы называются коллинеарными?
4. Что понимается под произведением вектора на число?
5. Что называется суммой векторов? Какие правила нахождения суммы векторов существуют?
6. Что называется разностью двух векторов? Как построить разность двух векторов?
7. Дайте определение скалярного произведения двух векторов?
8. По какой формуле вычисляется скалярное произведение в координатах?
9. По какой формуле вычисляется угол между двумя векторами в координатах?

Практическая работа №2
«Линейная зависимость векторов»

Цель: формирование навыков исследования системы векторов на линейную зависимость, определения базиса системы векторов и разложения вектора по базису.

Теоретические сведения

Понятия линейной зависимости и независимости системы векторов является очень важными при изучении алгебры векторов, так как на них базируются понятия размерности и базиса пространства.

Рассмотрим набор из p n-мерных векторов, обозначим их следующим образом $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(p)}$. Составим линейную комбинацию этих векторов и произвольных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ (действительных или комплексных): $\lambda_1 \cdot a^{(1)} + \lambda_2 \cdot a^{(2)} + \ldots + \lambda_p \cdot a^{(p)}$.

Отталкиваясь от определения операций над n-мерными векторами, а так же свойств операций сложения векторов и умножения вектора на число, можно утверждать, что записанная линейная комбинация представляет собой некоторый n-мерный вектор b, то есть, $\lambda_1 \cdot a^{(1)} + \lambda_2 \cdot a^{(2)} + \ldots + \lambda_p \cdot a^{(p)} = b$.

Так мы подошли к определению линейной зависимости системы векторов $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(p)}$.

Если линейная комбинация $\lambda_1 \cdot a^{(1)} + \lambda_2 \cdot a^{(2)} + \ldots + \lambda_p \cdot a^{(p)}$ может представлять собой нулевой вектор тогда, когда среди чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ есть хотя бы одно, отличное от нуля, то система векторов $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(p)}$ называется **линейно зависимой**.

Если линейная комбинация $\lambda_1 \cdot a^{(1)} + \lambda_2 \cdot a^{(2)} + \ldots + \lambda_p \cdot a^{(p)}$ представляет собой нулевой вектор только тогда, когда все числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ равны нулю, то система векторов $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(p)}$ называется **линейно независимой**.

На основании данных определений, сформулируем и докажем **свойства линейной зависимости и линейной независимости системы векторов:**

1. Если к линейно зависимой системе векторов $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(p)}$ добавить несколько векторов, то полученная система будет линейно зависимой.
2. Если из линейно независимой системы векторов $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(p)}$ исключить несколько векторов, то полученная система будет линейно независимой.
3. Если в системе векторов $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(p)}$ есть хотя бы один нулевой вектор, то такая система линейно зависимая.
4. Если система векторов $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(p)}$ линейно зависима, то хотя бы один из ее векторов линейно выражается через остальные. Если система векторов $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(p)}$ линейно независима, то ни один из векторов не выражается через остальные.

Таким образом, если система векторов содержит векторы a и $\gamma \cdot a$, где γ – произвольное число, то она линейно зависима.

Пусть требуется установить линейную зависимость или линейную независимость системы векторов $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(p)}$.

Определения и свойства позволяют установить линейную зависимость системы векторов в следующих случаях:

1. когда хотя бы один из векторов системы является нулевым;
2. когда система векторов содержит два или более равных вектора;
3. когда система векторов содержит пропорциональные векторы (a и $\gamma \cdot a$);
4. когда достаточно очевидно, что один из векторов системы линейно выражается через несколько других.

Составим матрицу А, строками которой будут векторы исследуемой системы $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(p)}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & \cdots & a_n^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & \cdots & a_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{(p)} & a_2^{(p)} & \cdots & a_n^{(p)} \end{pmatrix}$$

Используем для исследования системы векторов на линейную зависимость **теорему о ранге матрицы:**

Пусть r – ранг матрицы А порядка p на n, $r \le \min(p, n)$. Пусть М – базисный минор матрицы А. Все строки (все столбцы) матрицы А, которые не участвуют в образовании базисного минора М, линейно выражаются через строки (столбцы) матрицы, порождающие базисный минор М.

Из четвертого свойства линейной независимости системы векторов $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(p)}$ следует, что ни один из векторов системы не выражается через остальные, т.е. ни одна строка матрицы А не будет линейно выражаться через другие строки, следовательно, **линейная независимость системы векторов** $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(p)}$ **будет равносильна условию Rank(A)=p**.

Если хотя бы одна строка матрицы А будет линейно выражаться через остальные, **линейная зависимость системы векторов** $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(p)}$ **будет равносильна условию Rank(A)<p**.

Итак, задача исследования системы векторов на линейную зависимость сводится к задаче нахождения ранга матрицы, составленной из векторов этой системы.

Следует заметить, что при p>n система векторов $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(p)}$ будет линейно зависимой.

Замечание: при составлении матрицы А векторы системы $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(p)}$ можно брать не в качестве строк, а в качестве столбцов.

Алгоритм исследования системы векторов на линейную зависимость

1. Сначала следует убедиться, что число векторов исследуемой системы $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(p)}$ не превосходит числа координат векторов. Если же p>n, то можно делать вывод о линейной зависимости.

2. Проверяем, не содержит ли система векторов нулевого вектора, равных векторов, пропорциональных векторов (a и $\gamma \cdot a$). Если такие имеются, то также делается вывод о линейной зависимости системы.
3. Если два предыдущих пункта алгоритма не привели к результату, то составляем матрицу А, строками которой являются векторы исследуемой системы векторов и находим ее ранг. Если Rank(A)<p, то система векторов $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(p)}$ линейно зависима. Если Rank(A)=p, то система векторов $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(p)}$ линейно независима.

Примеры

Задание 1: Дана система векторов $a = (1, 2, 5), \quad b = (4, 0, -1), \quad c = (0, 0, 0)$. Исследуйте ее на линейную зависимость.

Решение: Так как вектор с нулевой, то исходная система векторов линейно зависима в силу третьего свойства. Следовательно, система векторов линейно зависима.

Задание 2: Исследуйте систему векторов на линейную зависимость. $a = (1, -1, 2, 0), \quad b = (1, 5, -2, \sqrt{2}), \quad c = (3, -3, 6, 0)$

Решение: Не сложно заметить, что координаты вектора с равны соответствующим координатам вектора a, умноженным на 3, то есть, $a = 3 \cdot c$. Поэтому, исходная система векторов линейно зависима.

Задание 3: Является ли система векторов $a = (1, 2), \quad b = \left(7, \frac{1}{3}\right), \quad c = (0, e^2), \quad d = (\sqrt{\pi}, 1)$ линейно зависимой?

Решение: Эта система векторов является линейно зависимой, так как количество векторов в системе равно 4, а сами векторы двумерные.

Задание 4: Является ли система векторов $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ линейно независимой?

Решение: Примем эти векторы столбцами матрицы А и найдем ранг полученной матрицы методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1+1\cdot 1 & -1+1\cdot 2 & 0+1\cdot 2 \\ 3+(-3)\cdot 1 & 4+(-3)\cdot 2 & 2+(-3)\cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2+2\cdot 1 & -4+2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно, Rank(A)=2<3, поэтому, исходная система векторов линейно зависима.

Задание 5: Докажите, что система векторов $e^{(1)} = (1, 2, -1, -2, 0)$, $e^{(2)} = (2, 3, 0, -2, 1)$
$e^{(3)} = (1, 2, 1, 4, 2)$, $e^{(4)} = (1, 3, -1, 0, -1)$
линейно независима.

Решение: Составим матрицу, строками которой будут векторы данной системы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Покажем, что ранг этой матрицы равен количеству векторов исходной системы, то есть, четырем.

Ранг найдем методом окаймляющих миноров.

В качестве минора первого порядка, отличного от нуля, возьмем элемент $a_{11}=1$ матрицы А. Окаймляющий его минор второго порядка $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = -1$ также отличен от нуля.

Переходим к поиску окаймляющего минора третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \cdot 2 -$$
$$-(-1) \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \cdot 2 = -2 \neq 0$$

Осталось найти минор четвертого порядка, отличный от нуля. Вычислим определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Прибавим к первому столбцу третий, далее разложим определитель по элементам первого столбца:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+(-1) & 2 & -1 & -2 \\ 2+0 & 3 & 0 & -2 \\ 1+1 & 2 & 1 & 4 \\ 1+(-1) & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot 6 + 2 \cdot 8 = 4 \neq 0$$

Таким образом, ранг матрицы А равен четырем что доказывает линейную независимость исходной системы векторов.

Задания

Исследовать на линейную зависимость систему векторов

1) $i - j - 2k$, $i - 2j + k$ и $2i + k$;
2) $6i + 4k$, $2j + 3k$ и $i - j - 2k$;
3) $i - 2j + k$, $2i - j - k$ и $4i - 3j + 5k$;
4) $2i + k$, $6i + 4k$ и $2i - j$;
5) $\bar{a} = (2;3;-1)$, $\bar{b} = (0;1;4)$ и $\bar{c} = (1;0;-3)$.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте определение линейной зависимости векторов.
2. Назовите свойства линейной зависимости векторов
3. Каков алгоритм исследования системы векторов на линейную зависимость?

Практическая работа №3
«Различные уравнения прямой на плоскости. Взаимное расположение двух прямых»

Цель: формирование навыков составления уравнений прямых и определения их взаимного расположения

Теоретические сведения

Уравнение прямой на плоскости

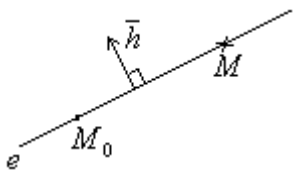
а) Общее уравнение прямой на плоскости

Уравнение I степени относительно x и y вида:

$$\underline{Ax + By + C = 0,}$$

где *A*, *B*, *C* – числа, прием $A \neq 0 \vee B \neq 0$, называется *общим* уравнением прямой на плоскости

1) Если *B*=0, то $Ax + C = 0$, где $A \neq 0$ $X = -\dfrac{C}{A}$ – уравнение прямой параллельной оси *OY*
2) Если *A*=0, то $By + C = 0$, где $B \neq 0$ $y = -\dfrac{C}{B}$ – уравнение прямой параллельной оси *OX*



3) Если C=0, то $Ax+By=0$ – уравнение прямой проходящей через начало координат

Вектор $\bar{n}=(A;B)$ – нормальный вектор или нормаль прямой.

б) Уравнение прямой, проходящей через данную точку, перпендикулярно данному вектору

Пусть задан $\bar{n}=(A;B)$ и $M_0(x_0;y_0)$, а $M(x;y)$ – текущая точка прямой. По условию $\overline{M_0M}\perp\bar{n}\Rightarrow\overline{M_0M}\cdot\bar{n}=0.$ $\overline{M_0M}=(x-x_0;y-y_0)$. Тогда $\underline{A(x-x_0)+B(y-y_0)=0}$.

в) Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Рассмотрим общее уравнение прямой и выразим y:

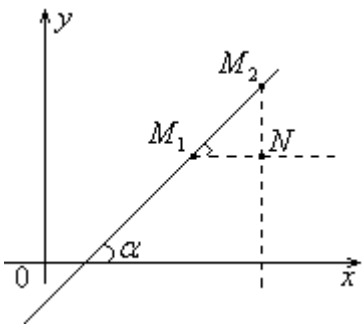
$$Ax+By+C=0;$$
$$By=-C-Ax;$$
$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$

Пусть $-\frac{A}{B}=k;\ -\frac{C}{B}=b;$

Тогда уравнение примет вид:

$y=kx+b$, где k – угловой коэффициент прямой $k=tg\alpha$, где α – угол между прямой и положительным направлением оси OX.

г) Уравнение прямой, проходящей через две точки



Пусть $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$ принадлежат искомой прямой.

Рассмотрим прямоугольный треугольник M_1M_2N. $N(x_2;y_1)$.

$$tg\alpha=\frac{NM_2}{M_1N}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=k.$$

Т.к. $M_1\in e$, то $y_1=kx_1+b$ – верное равенство. Вычтем из одного равенства другое:

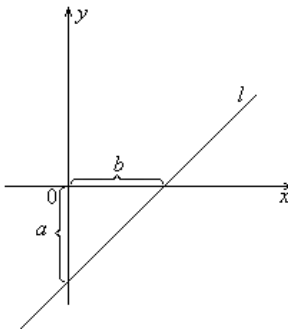
$$\begin{array}{rl} & y=kx+b \\ - & y_1=kx_1+b \\ \hline & y-y_1=k(x-x_1) \end{array}$$

– уравнение прямой, проходящей через заданную точку под заданным углом.

$$k=\frac{y-y_1}{x-x_1}\Rightarrow\underline{\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_2}}$$

д) Уравнение прямой «в отрезках»

Рассмотрим общее уравнение прямой $Ax+By+C=0$



$$Ax+By=-C \,\Big|:(-C)$$

$$\frac{Ax}{-C}+\frac{By}{-C}=1$$

$$\frac{x}{\underbrace{-\frac{C}{A}}_{=a}}+\frac{y}{\underbrace{-\frac{C}{B}}_{=b}}=1$$

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ – уравнение прямой в отрезках

е) Каноническое уравнение прямой

Пусть любой вектор, параллельный данной прямой, называется *направляющим* вектором прямой.

Составим уравнение прямой, проходящий через заданную точку $M_0(x_0;y_0)$ с заданным направляющим вектором $\overline{p}=(l;m)$.

Пусть $M(x;y)$ – текущая точка прямой, тогда $\overline{M_0M} \parallel \overline{p}$; $\overline{M_0M}=(x-x_0;y-y_0)$

$\Rightarrow \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}$ – *каноническое уравнение прямой*

ж) Параметрическое уравнение прямой

Рассмотрим каноническое уравнение прямой и ведем параметр *t*:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=t.$$

Тогда $\begin{cases} \frac{x-x_0}{l}=t, \\ \frac{y-y_0}{m}=t \end{cases}$ $\begin{cases} x=tl+x_0, \\ y=tm+y_0. \end{cases}$ – параметрическое уравнение прямой.

Взаимное расположение прямых на плоскости

1. Пусть $\alpha_1: A_1X+B_1y+C_1=0,\ \overline{n_1}=(A_1;B_1)$

$\alpha_2: A_2X+B_2y+C_2=0,\ \overline{n_2}=(A_2;B_2)$

$<(\alpha_1,\alpha_2)=<(\overline{n_1},\overline{n_2})$

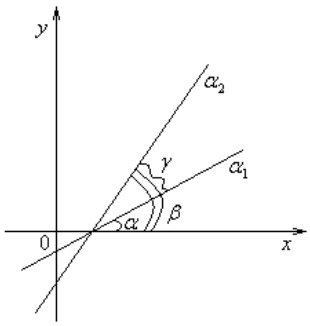
а) $\alpha_1 \parallel \alpha_2 \Leftrightarrow \overline{n_1} \parallel \overline{n_2} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$

б) $\alpha_1 \perp \alpha_2 \Leftrightarrow \overline{n_1} \perp \overline{n_2} \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$

2. Пусть $\alpha_1: \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{p_1},\ \overline{q_1}=(m_1;p_1)$

$\alpha_2: \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{p_2},\ \overline{q_2}=(m_2;p_2)$

$<(\alpha_1,\alpha_2)=<(\overline{q_1},\overline{q_2})$



а) $\alpha_1 \parallel \alpha_2 \Leftrightarrow \overline{q_1} \parallel \overline{q_2} \Leftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$;

б) $\alpha_1 \perp \alpha_2 \Leftrightarrow \overline{q_1} \perp \overline{q_2} \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 + p_1 \cdot p_2 = 0$;

3. Пусть α_1; $y = k_1 x + b_1$, $k_1 = tg\alpha$

$\alpha_2 : y = k_2 x + b_2$. $k_2 = tg\beta$

а) $\alpha_1 \parallel \alpha_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$

б) $\alpha_1 \perp \alpha_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$;

Пример

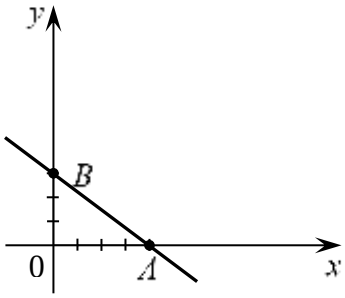
Задание 1: Построить прямую $3x + 4y - 12 = 0$.

Решение: Найдем точки пересечения прямой с осями Ox и Oy.

Пусть $x = 0 \Rightarrow 4y = 12 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow B(0, 3)$.

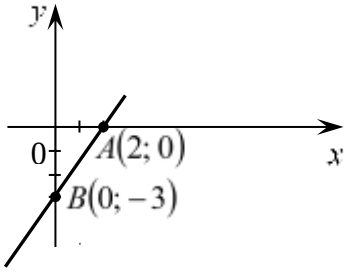
Пусть $y = 0 \Rightarrow 3x - 12 = 0 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow A(4, 0)$.

Изобразим найденные точки на координатной плоскости и соединим их, таким образом, получим прямую заданную уравнением $3x + 4y - 12 = 0$.



Задание 2: Построить прямую $\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = 1$.

Решение: Перепишем уравнение в виде: $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-3} = 1$, то есть $a = 2$ и $b = -3$. Таким образом, получаем точки $A(2; 0)$ и $B(0; -3)$, прямая проходящая через точки A и B является искомой.



Задание 3: Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $M(2; 3)$.

Решение: Вектор $OM=(2;3)$ коллинеарен искомой прямой. Для составления уравнения прямой используем каноническое уравнение прямой: $\frac{(x-x_0)}{m}=\frac{(y-y_0)}{n}$. Таким образом, подставив в данное уравнение $m=2$, $n=3$, $x=0$, $y=0$ получим искомое уравнение прямой проходящей через начало координат и точку $M(2;3)$:

$$\frac{(x-0)}{2}=\frac{(y-0)}{3}\Leftrightarrow\frac{x}{2}=\frac{y}{3}\Leftrightarrow 3x-2y=0.$$

Задание 4: Составить уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(3;-5)$ и перпендикулярной данному вектору $\vec{n}=(4;2)$.

Решение: Пусть $M(x;y)$ - произвольная точка искомой прямой. Вектор $M_0M=(x-3;y+5)$ перпендикулярен вектору $\vec{n}=(4;2)$. Так как векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю, то есть $\vec{n}\cdot M_0M=0$. Записав произведение этих векторов в координатной форме, получим:

$$(4;2)\cdot(x-3;y+5)=0\Leftrightarrow 4\cdot(x-3)+2\cdot(y+5)=0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 4x-12+2y+10=0\Leftrightarrow 4x+2y-2=0\Leftrightarrow 2x+y-1=0$. Уравнение искомой прямой имеет вид $2x+y-1=0$.

Задания

1. Проверить принадлежат ли точки $A(3;14)$, $B(4;13)$, $C(-3;0)$ и $D(0;7)$ прямой $7x-3y+21=0$.
2. Построить прямые:
   1) $x=4$; 2) $x=-3$; 3) $y=2$;
   4) $2x-5y+10=0$; 5) $4x+6y-3=0$; 6) $\frac{x}{2}+\frac{y}{6}=1$;
   7) $\frac{x}{5}-\frac{y}{4}=1$; 8) $-\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$; 9) $-\frac{x}{6}-\frac{y}{3}=1$.
3. Построить фигуру, ограниченную линиями $x=-2$, $x=0$, $y=-3$ и $y=0$. Вычислить площадь этой фигуры.
4. Преобразуйте уравнения следующих прямых к уравнениям в отрезках на осях:
   1) $3x-4y+2=0$; 2) $x+y-3=0$;
   3) $2x+3y+1=0$; 4) $2x+3y-6=0$;
   5) $3x-4y+12=0$.
5. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $M(x;y)$
   1) $M(-4;-1)$;
   2) $M(5;-4)$.
6. Составить уравнение прямой, проходящей через данную точку M_0 и перпендикулярной данному вектору $\vec{n}$:
   1) $M_0(-2;-3)$; $\vec{n}=(4;5)$;
   2) $M_0(1;-1)$; $\vec{n}=(-3;4)$.
7. Найти угол между прямыми:
   1) $3x-4y+2=0$ и $2x+3y+1=0$;
   2) $x+y-3=0$ и $2x+3y-6=0$;
   3) $3x-4y+12=0$ и $-\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$.

Вопросы для самоконтроля

1. Какое уравнение называется общим уравнением прямой?
2. Какой вид имеет векторное уравнение прямой?
3. Какое уравнение называется каноническим уравнением прямой?
4. Запишите уравнение прямой в отрезках и уравнение прямой с угловым коэффициентом.
5. Какой вид имеют уравнения прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении и прямой, проходящей через две данные точки?
6. Как исследовать взаимное расположение прямых, заданных общим уравнением?

Практическая работа №4
«Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой»

Цель: формирование навыков определения угла между прямыми и расстояния от точки до прямой.

Теоретические сведения

Угол между прямыми

1. Пусть $\alpha_1 : A_1X + B_1y + C_1 = 0,\ \overline{n_1} = (A_1; B_1)$

$\alpha_2 : A_2X + B_2y + C_2 = 0,\ \overline{n_2} = (A_2; B_2)$

$<(\alpha_1, \alpha_2) = <(\overline{n_1}, \overline{n_2})$

а) $\alpha_1 \parallel \alpha_2 \Leftrightarrow \overline{n_1} \parallel \overline{n_2} \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$

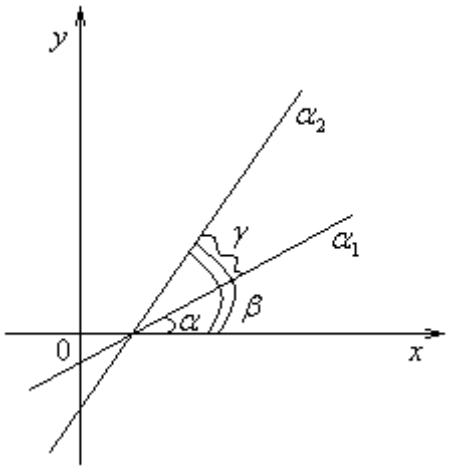
б) $\alpha_1 \perp \alpha_2 \Leftrightarrow \overline{n_1} \perp \overline{n_2} \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

в) $\cos<(\alpha_1; \alpha_2) = \cos<(\overline{n_1}; \overline{n_2}) = \dfrac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$

2. Пусть $\alpha_1 : \dfrac{x - x_1}{m_1} = \dfrac{y - y_1}{p_1},\ \overline{q_1} = (m_1; p_1)$

$\alpha_2 : \dfrac{x - x_2}{m_2} = \dfrac{y - y_2}{p_2},\ \overline{q_2} = (m_2; p_2)$

$<(\alpha_1, \alpha_2) = <(\overline{q_1}, \overline{q_2})$



а) $\alpha_1 \parallel \alpha_2 \Leftrightarrow \overline{q_1} \parallel \overline{q_2} \Leftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$;

б) $\alpha_1 \perp \alpha_2 \Leftrightarrow \overline{q_1} \perp \overline{q_2} \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 + p_1 \cdot p_2 = 0$;

в) $\cos<(\alpha_1; \alpha_2) = \cos<(\overline{q_1}; \overline{q_2}) = \dfrac{m_1 \cdot m_2 + p_1 \cdot p_2}{\sqrt{m_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + p_2^2}}$

3. Пусть $\alpha_1;\ y = k_1x + b_1,\ k_1 = tg\alpha$

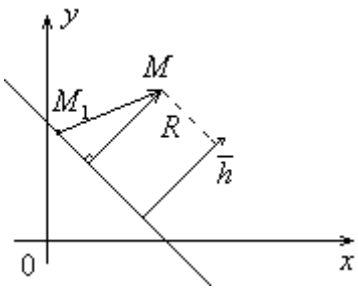
$\alpha_2 : y = k_2x + b_2.\ k_2 = tg\beta$

а) $\alpha_1 \parallel \alpha_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$

б) $\alpha_1 \perp \alpha_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$;

в) $tg\gamma = tg(\beta - \alpha) = \dfrac{tg\beta - tg\alpha}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta} = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$

Расстояние от точки до прямой



Пусть $L: Ax+By+C=0,\ M_0(x_0;y_0)$

Найдем расстояние от точки M_0 до L. Расстояние от точки M_0 до прямой L – это длина перпендикулярна, опущенного из M_0 на L. обозначим его d. Пусть $M_1(x_1;y_1)$ производная точка L. $d=\left|np_{\bar{n}}\overline{M_1M_0}\right|$.

$$np_{\bar{n}}\overline{M_1M_0}=\frac{\overline{M_1M_0}\cdot\bar{n}}{\left|\bar{n}\right|}=\frac{A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{Ax_0+By_0-Ax_1-By_1}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Т.к. $M_1\in L$, то $Ax_1+By_1+C=0\Rightarrow C=-Ax_1-By_1$

Тогда $d=\dfrac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

Пример

Задание: Найти расстояние от $M(-2;3)$ до прямой $L: 2x-3y+7=0$

Решение: $d=\dfrac{\left|2(-2)-3\cdot3+7\right|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{13}}$.

Задания

1. Определить взаимное расположение прямых l_1 и l_2, заданных уравнениями. Если прямые пересекаются, найти координаты их точки пересечения $M_0\ (x_0;\ y_0)$ и угол α между прямыми.

1. l_1: $3x+y-1=0$ и l_2: $x-2y+2=0$
2. l_1: $y=2x-4$ и l_2: $y=-0{,}5x+6$
3. l_1: $\dfrac{x-1}{-10}=\dfrac{y+1}{4}$ и l_2: $\dfrac{x+2}{5}=\dfrac{y-5}{-2}$
4. l_1: $2x-y-2=0$ и l_2: $-6x+3y+9=0$
5. l_1: $y=x-3$ и l_2: $y=x+6$
6. l_1: $4x+5y-1=0$ и l_2: $5x-4y+2=0$
7. l_1: $\dfrac{x-11}{7}=\dfrac{y+13}{3}$ и l_2: $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-5}{-7}$
8. l_1: $y=2x-4$ и l_2: $x-2y+4=0$
9. l_1: $6x-4y-18=0$ и l_2: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{3}$
10. l_1: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{3}$ и l_2: $\dfrac{x+2}{5}=\dfrac{y-4}{-2}$
11. l_1: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{3}$ и l_2: $y=2x-4$

2. Найти расстояние от точки $M_0\ (x_0;\ y_0)$ до прямой l:

1. $M(-4;-1)$ и l: $3x+y-1=0$

2. $M(5;-4)$ и $l: y = 2x - 4$
3. $M(5;-4)$ $l: \dfrac{x+2}{5} = \dfrac{y-5}{-2}$

Вопросы для самоконтроля

1. Как найти угол между прямыми, заданными общим уравнениями?
2. Как найти угол между прямой, заданной общим уравнением, и прямой, заданной каноническим уравнением?
3. Как найти угол между прямыми, заданными каноническими уравнениями?
4. Как найти угол между прямыми, заданными уравнениями с угловым коэффициентом?
5. Как найти расстояние от точки до прямой, заданной общим уравнением?

Практическая работа №5
«Плоскость в пространстве»

Цель: формирование навыков составления уравнений плоскостей и определения их взаимного расположения

Теоретические сведения

Плоскость является простейшей поверхностью.

а) Общее уравнение плоскости

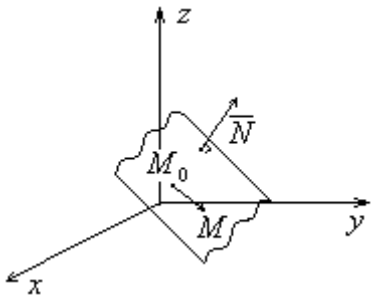
Рассмотрим уравнение I степени относительно *x, y* и *z*: $Ax + Bx + Cz + D = 0$,

где *A, B, C, D* – числа, причем *A, B, C* одновременно не равны нулю, называется *общим уравнением плоскости*.

1) Если $D = 0$, то $Ax + By + Cz = 0$ – уравнение плоскости, проходящей через начало координат.
2) Если $A = 0$, то $\pi: By + Cz + D = 0 | \pi \parallel OX$
3) Если $B = 0$, то $\pi: Ax + Cz + D = 0 | \pi \parallel OY$
4) Если $C = 0$, то $\pi: Ax + By + D = 0 | \pi \parallel OZ$
5) Если $A = 0$ и $B = 0$, то $\pi: Cz + D = 0 | \pi \parallel XOY$
6) Если $A = 0$ и $C = 0$, то $\pi: By + D = 0 | \pi \parallel XOZ$
7) Если $B = 0$ и $C = 0$, то $\pi: Ax + D = 0 | \pi \parallel YOZ$

Вектор $\overline{N} = (A; B; C)$ – нормальный вектор плоскости или нормаль плоскости

б) Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору



Пусть $\overline{N} = (A; B; C)$ и $M_0(x_0; y_0; z_0)$, а $M(x; y; z)$ – текущая точка искомой плоскости π.

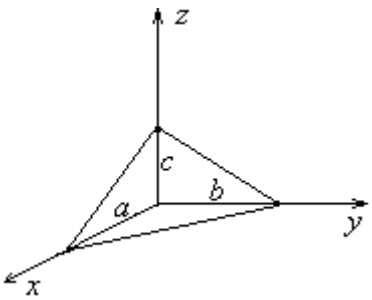
По условию $\overline{N} \perp \pi$ и $\overline{M_0M} \in \pi \Rightarrow \overline{N} \perp \overline{M_0M} \Rightarrow \overline{M_0M} \cdot \overline{N} = 0$

$\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$,

следовательно, $A(x - x_0) + B(y - y_0); C(z - z_0) = 0$ –

в) Уравнение плоскости «в отрезках»

Рассмотрим общее уравнение плоскости: $Ax + By + Cz + D = 0$



$$Ax+By+Cz=-D \,\Big|:(-D)$$

$$\frac{Ax}{-D}+\frac{By}{-D}+\frac{Cz}{-D}=1$$

$$\frac{x}{\frac{-D}{A}}+\frac{y}{\frac{-D}{B}}+\frac{z}{\frac{-D}{C}}=1$$

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ – уравнение плоскости «в отрезках»

г) Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

Пусть $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ и $M_3(x_3;y_3;z_3)$ не лежат на одной прямой. Пусть $M(x;y;z)$ – текущая точка искомой плоскости.

Тогда $\overline{M_1M}=(x-x_1;y-y_1;z-z_1)$;

$\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$;

$\overline{M_1M_3}=(x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1)$

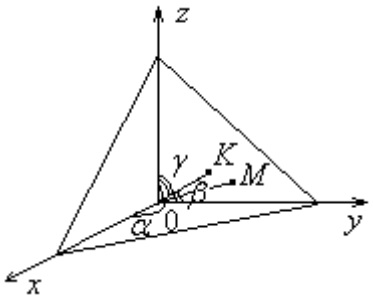
Эти векторы компланарны, следовательно,

$\overline{M_1M}\cdot\overline{M_1M_2}\cdot\overline{M_1M_3}=0$

или

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

д) Нормальное уравнение плоскости



Положение плоскости π вполне определяется единичным вектором $\bar{e}$, направленным по перпендикуляру OK, опущенному из начала координат на π, и длиной этого перпендикуляра ρ.

Пусть $OK=\rho$, α,β,γ - углы образованные вектором $\bar{e}$ с осями координат. Тогда $\bar{e}=(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$. Пусть $M(x;y;z)$ - текущая точка π, тогда радиус – вектор точки M

$\overline{r_M}=\overline{OM}=(x;y;z)$

$Пр_{\bar{e}}\bar{r}=\rho \Rightarrow \bar{r}\cdot\bar{e}-\rho=0 \Rightarrow$ $\underline{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-\rho=0}$

Общее уравнение плоскости можно привести к нормальному, умножив его на нормирующий множитель $\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, выбирая знак противоположным знаку *D*.

Взаимное расположение плоскостей

Пусть $\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$

$\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$

а) $\pi_1\perp\pi_2 \Leftrightarrow \overline{N_1}\perp\overline{N_2} \Leftrightarrow A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C_2=0$

б) $\pi_1\parallel\pi_2 \Leftrightarrow \overline{N_1}\parallel\overline{N_2} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$

если $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$, π_1 совпадает с π_2.

в) $\pi_1 \cap \pi_2 = \alpha$

$$\angle(\pi_1;\pi_2)=\angle(\overline{N_1};\overline{N_2})$$

$$\cos\alpha=\frac{\overline{N_1}\cdot\overline{N_2}}{|\overline{N_1}|\cdot|\overline{N_2}|}$$

$$\cos\alpha=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

Задания

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и точки А (4;-2;1) и В(2;4;-3).

2. Составить уравнение плоскости π, проходящей через точки А(3;0;2), В(-2;1;-3) и С(3;1;0), и привести его к виду уравнения "в отрезках". Найти координаты точек пересечения плоскости с координатными осями.

3. Составить уравнение плоскости π_1, проходящей через точку М(3;-1;2) параллельно плоскости $\pi_2: 2x-y+z+1=0$.

4. Исследовать взаимное расположение плоскостей:

а	$\pi_1: x+y+4=0$ $\pi_2: 3x-3z+1=0$	г	$\pi_1: 4x-7y+3=0$ $\pi_2: y-5z-2=0$
б	$\pi_1: x+2y-5z+3=0$ $\pi_2: 2x+4y+2z-7=0$	д	$\pi_1: 3x-9y+15z+6=0$ $\pi_2: -x+3y-5z-2=0$
в	$\pi_1: 6x+2y-4z+6=0$ $\pi_2: 3x+y-2z-2=0$	е	$\pi_1: 3x-y+2z+3=0$ $\pi_2: -2x-4y+z-2=0$

5. При каких значениях параметра **а** плоскости $\pi_1: ax+2y-3z+1=0$ и $\pi_2: 2x-2ay+2z-7=0$ будут

а) перпендикулярны?

б) параллельны?

Вопросы для самоконтроля

1. Какое уравнение называется общим уравнением плоскости?
2. Какое уравнение называется нормальным уравнением плоскости?
3. Запишите уравнение плоскости в отрезках.
4. Какой вид имеет уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору?
5. Какой вид имеет уравнение плоскости, проходящей через три данные точки?
6. Как исследовать взаимное расположение плоскостей, заданных общим уравнением?

Практическая работа №6
«Прямая в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве»

Цель: формирование навыков составления уравнений прямой в пространстве и определения взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве

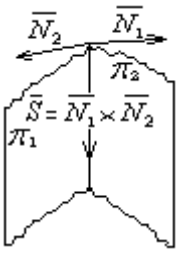
Теоретические сведения

Уравнение прямой в пространстве

а) Общее уравнение прямой

Прямую в пространстве можно задать как линию пересечения двух непараллельных плоскостей π_1 и π_2.

$$l:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$



Т.к. $l\perp\overline{N_1}$, $l\perp\overline{N_2}$, то направляющим вектором l может быть вектор векторного произведения векторов $\overline{N_1}\times\overline{N_2}$.

$$\overline{S}=\overline{N_1}\times\overline{N_2}=\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix};-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right)$$

б) Каноническое уравнение прямой в пространстве

Пусть $\overline{S}=(m;n;p)$– направляющий вектор прямой l и $M_0(x_0;y_0;z_0)\in l$. Пусть $M(x;y;z)$ - текущая точка прямой, тогда $\overline{M_0M}\parallel\overline{S}$.

следовательно, $\underline{\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}}$

в) Параметрическое уравнение прямой в пространстве

Рассмотрим каноническое уравнение прямой и введем параметр t:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t.$$

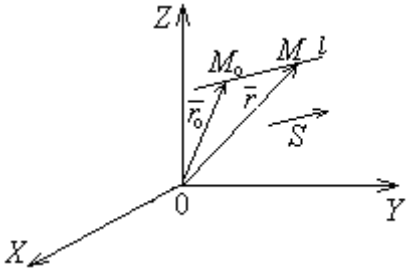
Тогда $\begin{cases} x=mt+x_0; \\ y=nt+y_0; \\ z=pt+z_0; \end{cases}$ *– параметрическое уравнение прямой*

г) Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки

Пусть $M_1(x_1;y_1;z_1)\in l$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)\in l$, а $M(x;y;z)$ – текущая точка прямой.

$$\overline{M_1M}\parallel\overline{M_1M_2}\Rightarrow\underline{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}}$$

д) Векторное уравнение прямой в пространстве



Пусть прямая l задана точкой $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и направляющим вектором $\overline{S}$, а $M(x;y;z)$ – текущая точка прямой.

Пусть $\overline{OM_0}=\overline{r_0}$, $\overline{OM}=\overline{r}$.

$$\overline{OM}=\overline{OM_0}+\overline{M_0M}$$

$$\overline{M_0M}\parallel\overline{S}\Rightarrow\overline{M_0M}=t\overline{S},$$

тогда $\underline{\overline{r}=\overline{r_0}+t\overline{S}}$ *– векторное уравнение прямой*

Взаимное расположение прямых в пространстве

$l_1: \dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1};$

$l_2: \dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}.$

а) $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \overline{S_1} \parallel \overline{S_2} \Leftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2};$

б) $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \overline{S_1} \parallel \overline{S_2} \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2 = 0$

в) $l_1 \cap l_2 = \alpha \quad \angle(l_1, l_2) = \angle(\overline{S_1}; \overline{S_2})$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{S_1} \cdot \overline{S_2}}{|\overline{S_1}| \cdot |\overline{S_2}|} = \frac{m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

г) $l_1 \in \pi$ и $l_2 \in \pi$

$M_1 \in l_1$ и $M_2 \in l_2 \Rightarrow \overline{M_1M_2} \in \pi$

Т.к. $\overline{S_1} \in \pi$ и $\overline{S_2} \in \pi$, то $\overline{M_1M_2} \cdot \overline{S_1} \cdot \overline{S_2} = 0$

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$$

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

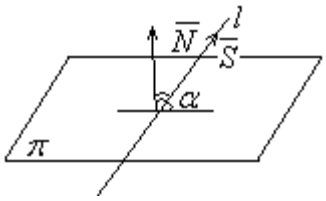
Пусть $l: \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p},$

$\pi: Ax + By + Cz + D = 0$

а) $l_1 \parallel \pi \Leftrightarrow \overline{S_1} \parallel \overline{N} \Leftrightarrow \dfrac{m}{A}=\dfrac{n}{B}=\dfrac{p}{C}$

б) $l_1 \parallel \pi \Leftrightarrow \overline{S} \parallel \overline{N} \Leftrightarrow Am + Bn + Cp = 0$

в) $\angle(l;\pi) = \alpha \Rightarrow \angle(\overline{N}; \overline{S}) = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$



$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha = \frac{|\overline{N} \cdot \overline{S}|}{|\overline{N}| \cdot |\overline{S}|} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

г) Точка пересечения прямой и плоскости чтобы найти точку $M(x; y; z) = l \cap \pi$, необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt; \\ z = z_0 + pt, \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

Для этого значения *x, y* и *z* необходимо подставить в уравнение плоскости и найти значение *t*, затем найти координаты М. Если при подстановке получалось тождество, то $l \in \pi$, если неверное равенство, то $l \parallel \pi$.

Задания

1. Составить уравнение прямой L, проходящей через точку A(-3;1;-2) параллельно прямой, заданной пересечением плоскостей $\begin{cases} 2x-5y+3z-1=0, \\ x+3y-4z+8=0. \end{cases}$

2. Составить уравнение прямой L, проходящей через точки A(3;0;2), B(-2;1;-3). Привести уравнение этой прямой к виду параметрического уравнения.
3. Исследовать взаимное расположение прямых:

а	$L_1: \frac{x-3}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+6}{4}$ $L_2: \frac{x+4}{1}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z-3}{1}$	в	$L_1: \frac{x-2}{5}=\frac{y}{6}=\frac{z+1}{-1}$ $L_2: \frac{x}{-2}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z-1}{1}$
б	$L_1: \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{1}$ $L_2: \frac{x}{-1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-2}{4}$	г	$L_1: \frac{x-2}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z+1}{-1}$ $L_2: \frac{x+5}{-3}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z-3}{3}$

4. Составить уравнение прямой L, проходящей через точку A (1;-2;3) перпендикулярно плоскости $\pi: 2x-y+z+1=0$.
5. Найти точку пересечения прямой $L: \frac{x-3}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+6}{4}$ и плоскости $\pi: x-y+z-3=0$

Вопросы для самоконтроля

1. Какое уравнение называется общим уравнением прямой в пространстве?
2. Какое уравнение называется каноническим уравнением прямой в пространстве?
3. Запишите уравнение параметрическое прямой в пространстве.
4. Какой вид имеет уравнение прямой в пространстве, проходящей через две данные точки?
5. Как исследовать взаимное расположение прямых в пространстве, заданных общим уравнением?
6. Как найти угол между прямыми в пространстве, заданными общим уравнениями?
7. Как найти угол между плоскостью, заданной общим уравнением, и прямой, заданной каноническим уравнением?

Практическая работа №7
«Решение задач на нахождение канонического уравнения эллипса, гиперболы и параболы и их исследование»

Цель: Формирование навыков составления уравнений кривых второго порядка и их исследования

Теоретические сведения

Окружностью называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки этой плоскости, называемой центром.

Уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом r имеет вид $x^2 + y^2 = r^2$.

Уравнение окружности с центром в точке $O_1(a; b)$ и радиусом r имеет вид $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

Уравнение окружности в общем виде записывается так: $Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0$, где A, B, C и D - постоянные коэффициенты.

Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная $(2a)$, большая расстояния между фокусами $(2c)$.

Уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси Ox, имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \, (a > b)$, где a - длина большей полуоси; b - длина малой полуоси.

Эллипс - это линия симметричная относительно осей *Ox* и *Oy*.

Точки

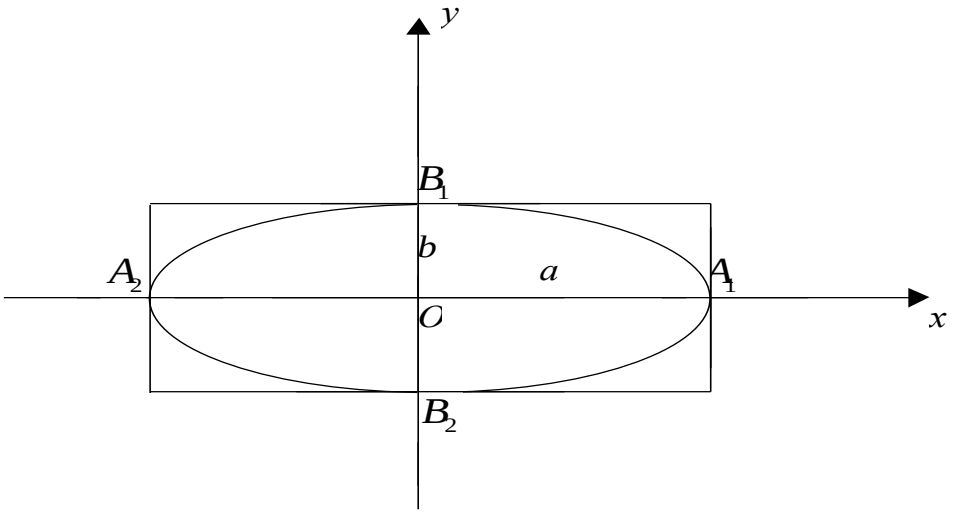
$$A_1(a;0), A_2(-a;0), B_1(0;b), B_2(0;-b)$$

называются вершинами эллипса.

Из канонического уравнения эллипса мы можем вывести формулы для вычисления *x* и *y*:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

$$x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}.$$



Гиперболой называется множество точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная $(2a)$, меньшая расстояния между фокусами $(2c)$.

Уравнение гиперболы, фокусы которого лежат на оси Ox, имеет вид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, где a - длина действительной полуоси; b - длина мнимой полуоси.

Из канонического уравнения гиперболы выводим уравнения *x* и *y*:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

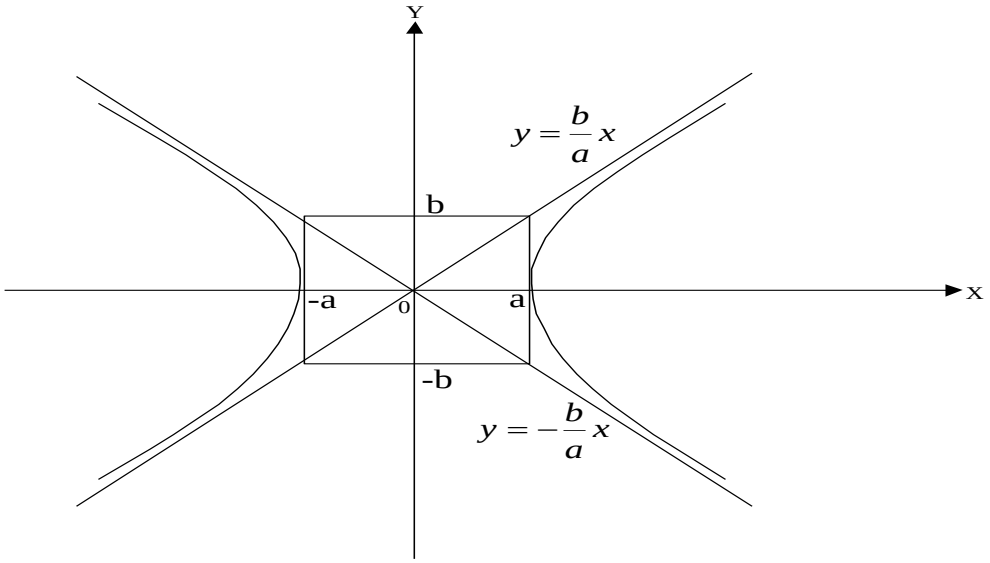
$$x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2}.$$

Гипербола состоит из двух частей, называемых **ветвями.**

При $a=b$ гипербола называется **равносторонней (равнобочной)** и её уравнение имеет вид

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad (a \neq 0).$$

Гипербола, заданная уравнением вида $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0)$ имеет вид:



Гипербола, заданная уравнением вида $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0),$ называется **сопряжённой** гиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0)$.

Центром гиперболы является начало координат. Точки пересечения гиперболы с осями симметрии называются **вершинами гиперболы, ч**исла a ,b – **полуосями**.

Прямые

$$y = \frac{b}{a}x \quad и \quad y = -\frac{b}{a}x$$

являются **асимптотами гиперболы**.

Параболой называется множество точек на плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой.

Уравнение параболы с вершиной в начале координат, осью симметрии которой служит ось Ox и ветви направлены вверх, имеет вид $x^2 = 2py$, где $p > 0$ (параметр параболы) – расстояние от фокуса до директрисы. Уравнение ее директрисы $y = -\frac{p}{2}$.

Задания

1. Составить уравнение гиперболы с фокусами на оси Ох, если расстояние между ее фокусами равно 20, а уравнение ее асимптот $y = \pm\frac{5}{3}x$.
2. Составить уравнение директрисы параболы y^2-4y-12x+16=0.
3. Составить уравнение эллипса с фокусами на оси Ох, если расстояние между фокусами равно16, а эксцентриситет равен ½.

4. Составить уравнение оси параболы y^2-6y-12x-15=0.
5. Составить уравнение эллипса с фокусами на оси Ox, если расстояние между фокусами равно12, а эксцентриситет равен 3/10.
6. Составить уравнение эллипса с фокусами на оси Ox, проходящего через точки A(6;4) и B($4;\sqrt{21}$).
7. Найти эксцентриситет эллипса $\frac{x^2}{1600}+\frac{y^2}{1024}=1$.
8. Найти эксцентриситет гиперболы $\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{63}=1$.
9. Дан эллипс $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Найти его полуоси и расстояние между фокусами.
10. Написать уравнение гиперболы, проходящей через точку (2;1) , асимптоты которой $y=\pm\frac{3}{4}x$.
11. Дана гипербола $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$. Найти ее оси и расстояние между фокусами.
12. Написать уравнение параболы с вершиной в начале координат, если координаты фокуса равны F(0;-5).
13. Найти эксцентриситет эллипса $4x^2+9y^2=180$.
14. Написать уравнение директрисы и найти координаты фокуса параболы $У^2=4x$.
15. Составить уравнение окружности, проходящей через точки
    1) $A(3;1)$, $B(-2;6)$, $C(-5;-3)$;
    2) $A(2;8)$, $B(4;-6)$, $C(-12;-6)$;
16. Составьте уравнение эллипса, если две его вершины находятся в точках $A(-5;0)$ и $B(5;0)$ B, а фокусы в точках $F_1(-3;0)$, $F_2(3;0)$;

Вопросы для самоконтроля:

1. Какая кривая называется окружностью, эллипсом, гиперболой, параболой?
2. Куда направлены ветви параболы, заданной уравнением $x^2=-3y$?
3. Вдоль какой оси вытянут эллипс, заданный уравнением $\frac{y^2}{12}+\frac{x^2}{16}=1$?
4. Какую ось пересекает гипербола, заданная уравнением $\frac{y^2}{11}-\frac{x^2}{6}=1$?
5. Чему равен радиус окружности, заданной уравнением $(x+4)^2+(y-2)^2=256$?
6. Как изменится уравнение окружности, если ее центр сместится в начало координат?

Практическая работа №8
«Вычисление определителей третьего порядка различными способами»

Цель: формирование навыков вычисления определителей второго и третьего порядков.

Теоретические сведения

Определителем второго порядка называется число, определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}. \qquad (1)$$

Числа $a_{11}, a_{22}, a_{12}, a_{21}$ называются *элементами* определителя; при этом элементы a_{11} и a_{22} образуют *главную диагональ*, а элементы a_{12} и a_{21} - *побочную диагональ*. Таким образом, определитель второго порядка равен произведению элементов главной диагонали минус произведение элементов побочной диагонали.

Определителем третьего порядка называется число, определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \qquad (2)$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Таким образом, каждый член определителя третьего порядка представляет собой произведение трех его элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца. Эти произведения берутся с определенными знаками: со знаком «плюс» – члена, состоящие из элементов главной диагонали и из элементов, расположенных в вершинах треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали; со знаком «минус» – три члена, расположенные аналогичным образом относительно побочной диагонали.

Указанное правило, называется *правилом треугольников*.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель D_{n-1}, полученный из D_n вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется его минор, умноженный на $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Определитель n-го порядка равен сумме произведений элементов какой – либо строки или столбца на их алгебраические дополнения:

$$D_n = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

(разложение определителя по элементам i-ой строки) или

$$D_n = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

(разложение определителя по элементам j-го столбца).

В частности, для определителя третьего порядка имеем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

что совпадает с результатом, полученным по формуле (2).

Свойства определителей

1.Определитель не меняется при транспонировании.

2.Если одна из строк определителя состоит из нулей, то определитель равен нулю.

3.Если в определителе переставить две строки, определитель поменяет знак.

4.Определитель, содержащий две одинаковые строки, равен нулю.

5.Если все элементы некоторой строки определителя умножить на некоторое число k, то сам определитель умножиться на k.

6. Определитель, содержащий две пропорциональные строки, равен нулю.

7.Если все элементы i – й строки определителя представлены в виде суммы двух слагаемых $a_{ij} = b_j + c_j$ (j = 1, n), то определитель равен сумме определителей, у которых все

строки, кроме i - ой, - такие же, как в заданном определителе, а i- я строка в одном из слагаемых состоит из элементов b_j, в другом - из элементов c_j.

8. Определитель не меняется, если к элементам одной из его строк прибавляются соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.

Замечание. Все свойства остаются справедливыми, если вместо строк взять столбцы.

Пример

Задание: Вычислить определители: 1) $\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 8 & -2 & 6 \end{vmatrix}$.

Решение: 1) По формуле (1) находим $\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = -2\cdot 8 - 7\cdot 3 = -37$.

2) Разлагая данный определитель, например, по элементам первой строки, находим

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 8 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}(-4)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot 28 - 4\cdot(-46) + 1\cdot(-22) = 218.$$

Тот же результат получится, если воспользоваться формулой (2):

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 8 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 6 + (-1)\cdot(-2)\cdot 1 + 4\cdot 5\cdot 8 - 8\cdot 3\cdot 1 -$$

$$-2\cdot 5\cdot(-2) - 4\cdot(-1)\cdot 6 = 218.$$

Задания

1. Вычислить определители третьего порядка по трем правилам

№ п/п	Задание	№ п/п	Задание	№ п/п	Задание
1.	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 7 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$	2.	$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 8 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$	5.	$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 1 & 4 & 3 \\ -5 & -3 & 6 \end{vmatrix}$
3.	$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$	4.	$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$	6.	$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

2. Вычислить определители, содержащие переменные и функции

№ п/п	Задание	№ п/п	Задание	№ п/п	Задание
1	$\begin{vmatrix} x+1 & x-1 \\ x & x+1 \end{vmatrix}$	2	$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{vmatrix}$	3	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & x & 0 \\ -3 & x & -1 \end{vmatrix}$

3. Решить уравнение

№ п/п	Задание	№ п/п	Задание
1	$\begin{vmatrix} x+2 & x-1 \\ x+4 & 2x-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 7 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$	2.	$\begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ 5 & 3 & x \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 40$

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется определителем?
2. Как вычисляются определители второго и третьего порядков?
3. Что называется минором и алгебраическим дополнением для произвольного элемента a_{ij} определителя?

Практическая работа №9
«Операции над матрицами, их свойства»

Цель: формирование навыков выполнения операций над матрицами.

Теоретические сведения

Прямоугольная матрица A размера $m \times n$ ($m \times n$-матрица) имеет вид таблицы, состоящей из m строк и n столбцов:

$$A = \left(a_{ij}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Элемент матрицы a_{ij} находится на пересечении i-ой строки и j-го столбца, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$.

У *нулевой* матрицы 0 все элементы равны нулю:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица – столбец ($m \times 1$-матрица) состоит из одного столбца:

$$\underset{(m\times 1)}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix},$$

а *матрица – строка* ($1 \times n$-матрица) из одной строки:

$$\underset{(1\times n)}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}.$$

Произведением двух матриц A и B называется матрица C, каждый элемент которой определяется по правилу *строка на столбец*, то есть элемент стоки матрицы A умножается на элемент столбца матрицы B стоящие на соответствующих местах.

Из определения произведения матриц следует, что не любые две матрицы можно перемножать. Произведение AB имеет смысл только тогда, когда число столбцов первой

матрицы-сомножителя равно числу строк второй матрицы-сомножителя, что символически записывается так:

$$(m \times k) \cdot (k \times n) = (m \times n).$$

Транспонирование $m \times n$-матрицы заключается в замене строк столбцами, а столбцов – строками с теми же номерами:

$$\underset{(n\times m)}{A}^{T} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрица $C = (c_{ij})$ размера $m \times n$ называется *суммой* двух $m \times n$-матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$, если каждый элемент матрицы C равен сумме соответствующих элементов матриц A и B:

$$C = \underset{(m\times n)}{A + B} \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Пример

Задание: Найти сумму и разность матриц $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение: Здесь даны матрицы одного размера 3×2, следовательно, существуют их сумма и разность. Согласно определению алгебраической суммы матриц имеем

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+7 & -1+5 \\ 3+2 & 0-3 \\ -5+0 & -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 5 & -3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 2-7 & -1-5 \\ 3-2 & 0-(-3) \\ -5-0 & -2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 3 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Задания

1. Найти сумму матриц $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Транспонировать матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & 9 & -5 \\ -7 & 5 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Указать размеры данной и транспонированной матриц.
3. Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Выполнить указанные действия, а в случае, когда это невозможно, указать причину:
   1) $2A - B$;
   2) $A^T + 4B$.

4. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & 1 & 5\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}0 & -2 & 1 & 5\\ -1 & -1 & -3 & 1\\ 2 & 3 & -5 & 0\end{pmatrix}$. Найти матрицу $C=A\cdot B$.

5. Найти значение матричного многочлена 2AB + 5B^2+3BA, если:

Вариант	Задание	Вариант	Задание
1	$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 3 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$	6	$A=\begin{pmatrix}7 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}5 & 1 & 4\\ 0 & -1 & 1\\ 3 & 3 & -1\end{pmatrix}$
2	$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 6\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$	7	$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 3 & -1 & 3\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 5\\ 8 & 0 & 3\end{pmatrix}$
3	$A=\begin{pmatrix}0 & -2 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 7\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 3\\ -3 & -1 & 0\\ -2 & 0 & -1\end{pmatrix}$	8	$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -3 & -1 & 4\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 4 & 2\end{pmatrix}$
4	$A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -1\\ 3 & -1 & 4\\ -1 & 0 & 4\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ -3 & -1 & 0\\ -2 & 0 & -1\end{pmatrix}$	9	$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 3 & -3 & 3\\ 2 & 4 & 2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2 & 6 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 8 & 1 & 2\end{pmatrix}$
5	$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -2 & -1 & 0\\ -5 & 1 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & -3\\ 3 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$	10	$A-\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 7\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ 0 & -1 & 5\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется матрицей? Как установить размерность матрицы?
2. Назовите линейные операции над матрицами. Как они производятся?
3. Какие матрицы можно перемножать? Как это делается?

Практическая работа №10
«Решение систем линейных уравнений методом Гаусса»

Цель: формирование навыков решения СЛАУ методом Гаусса

Теоретические сведения

Задачи, посвященные решению систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом исключения неизвестных для случая, когда СЛАУ имеет бесконечное множество решений (совместная неопределенная СЛАУ). При решении системы предлагается использовать одну из равносильностей *метода исключения неизвестных – метод Жордана – Гаусса* или *метода полного исключения*.

В процессе решения система преобразуется в равносильные (эквивалентные) системы, то есть СЛАУ с тем же множеством решений.

К *элементарным преобразованиям*, сохраняющим равносильность СЛАУ, относятся следующие преобразования:

- смена мест уравнений СЛАУ;
- отбрасывание одного из двух одинаковых уравнений СЛАУ;

- умножение обеих частей какого-либо уравнения на число, отличное от нуля;
- замена одного из уравнений СЛАУ уравнением, полученным его почленным сложением с другим уравнением СЛАУ.

Сущность метода исключения состоит в том, что с помощью указанных элементарных преобразований, не нарушающих равносильности СЛАУ, выбранное неизвестное (ведущее) исключается из всех уравнений системы, кроме одного (ведущего уравнения). Метод осуществляется по шагам. На каждом шаге исключается только одно неизвестное. Шаги заканчиваются, когда ведущим побывают все уравнения системы (либо будет получено очевидное противоречие, говорящее об отсутствии решений СЛАУ).

Пример

Задание: Пользуясь методом исключения неизвестных найти общее решение системы линейных уравнений, а также два частных ее решения, одно из которых базисное:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -7 \\ 4x_1 + 16x_2 - 7x_3 + 3x_4 = 1 \\ -2x_1 - 19x_2 + 8x_3 + 2x_4 = -8 \end{cases}$$

Решение: Система имеет размер 3×4 (три уравнения, четыре неизвестных). На каждом шаге выбираем одно ведущее уравнение и в нем одно ведущее неизвестное. *Ведущим каждое уравнение и каждое неизвестное могут быть только один раз*. На следующем шаге их за ведущие брать нельзя.

Шаг первый. Выберем в качестве ведущего уравнения первое, а в нем ведущее неизвестное x_3, так как коэффициент при x_3 равен единице, что упрощает вычисления.

Ведущее уравнение, то есть первое, оставляем без изменения. Исключим ведущее неизвестное x_3 из второго и третьего уравнений. Для этого нужно преобразовать эти уравнения к виду, когда коэффициенты при x_3 в них станут равными нулю.

Умножим обе части ведущего уравнения на число 7 и почленно сложим со вторым уравнением. Аналогично, умножим обе части ведущего уравнения на «-8» и почленно сложим с третьим уравнением. В итоге получим систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -7 \\ 4x_1 + 16x_2 - 7x_3 + 3x_4 = 1 \quad \left| + I \cdot 7 \right. \\ -2x_1 - 19x_2 + 8x_3 + 2x_4 = -8 \left| + I \cdot (-8) \right. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -7 \\ 18x_1 - 5x_2 \quad + 38x_4 = -48 \\ -18x_1 + 5x_2 \quad - 38x_4 = 48 \end{cases} \Rightarrow$$

Теперь переменная x_3 содержится только в первом уравнении. Заметим также, что два последних уравнения станут одинаковыми, если в одном из них поменять знаки. Поэтому, отбросим одно из этих уравнений, например, третье.

Шаг второй. Выберем в качестве ведущего второе (другое) уравнение. Так как в нем нет неизвестного с коэффициентом 1, то берем любое неизвестное, с коэффициентом, отличным от нуля, и делим обе части нового ведущего уравнения на этот коэффициент. Например, выберем во втором уравнении в качестве ведущего неизвестное x_2, с коэффициентом «-5», и поделим обе части этого уравнения на «-5»:

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -7 \quad \left| + II \cdot 3 \right. \\ -3{,}6x_1 + x_2 \quad - 7{,}6x_4 = 9{,}6 \end{cases} \Rightarrow$$

Чтобы исключить x_2 из первого уравнения, умножим обе части ведущего (второго) уравнения на 3 и почленно сложим с первым. Ведущее уравнение перепишем без изменения.

$$\Rightarrow \begin{cases} -8{,}8x_1 \quad + x_3 - 17{,}8x_4 = 21{,}8 \\ -3{,}6x_1 + x_2 \quad - 7{,}6x_4 = 9{,}6 \end{cases} \Rightarrow$$

Ведущая переменная содержится теперь только во втором (ведущем) уравнении. Так как все уравнения уже были ведущими (каждое на своем шаге), то преобразования закончены.

Выразим из каждого уравнения то неизвестное, которое было в нем ведущим, и поэтому, не содержится в других уравнениях:

$$\Rightarrow \begin{cases} x_3 = 21{,}8 + 8{,}8x_1 + 17{,}8x_4 \\ x_2 = 9{,}6 + 3{,}6x_1 + 7{,}6x_4 \end{cases}.$$

Получено общее решение данной системы. Переменные x_2 и x_3, которые мы выразили, называются *базисными*. Остальные переменные x_1 и x_4 - называются *свободными*, они задаются произвольно (свободно)

Общее решение СЛАУ представляет собой такую запись СЛАУ, когда часть ее переменных, называемых базисными, выражены через оставшиеся переменные, называемые свободными.

Частные решения СЛАУ могут быть получены из общего решения. Для этого задаем произвольно свободные переменные и вычисляем базисные по общему решению.

Например, пусть $x_1 = 1$; $x_4 = -2$. Тогда

$$\begin{cases} x_3 = 21{,}8 + 8{,}8 \cdot 1 + 17{,}8 \cdot (-2) = 30{,}6 - 35{,}6 = -5 \\ x_2 = 9{,}6 + 3{,}6 \cdot 1 + 7{,}6 \cdot (-2) = 13{,}2 - 15{,}2 = -2 \end{cases}.$$

Таким образом, получено частное решение системы: $(1; -2; -5; -2)$. Придавая свободным переменным x_1 и x_4 другие значения, найдем, аналогичным образом, любое количество частных решений СЛАУ.

Базисное решение СЛАУ, это такое частное решение, когда свободные переменные равны нулю, то есть $x_1 = 0$; $x_4 = 0$, тогда $\begin{cases} x_3 = 21{,}8 + 8{,}8 \cdot 0 + 17{,}8 \cdot 0 = 21{,}8 \\ x_2 = 9{,}6 + 3{,}6 \cdot 0 + 7{,}6 \cdot 0 = 9{,}6 \end{cases}$. Получено базисное решение системы: $(0; 9{,}6; 21{,}8; 0)$.

Проверка: Проверим правильность нахождения двух частных решений, из которых базисное, подстановкой в исходную систему.

1) Проверяем решение $(1; -2; -5; -2)$:

$$\begin{cases} 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) + (-5) + 5 \cdot (-2) = 2 + 6 - 5 - 10 = -7 \\ 4 \cdot 1 + 16 \cdot (-2) - 7 \cdot (-5) + 3 \cdot (-2) = 4 - 32 + 35 - 6 = 1 \\ -2 \cdot 1 - 19 \cdot (-2) + 8 \cdot (-5) + 2 \cdot (-2) = -2 + 38 - 40 - 4 = -8 \end{cases}$$

таким образом, все уравнения СЛАУ выполняются.

2) Проверим решение $(0; 9{,}6; 21{,}8; 0)$:

$$\begin{cases} 2 \cdot 0 - 3 \cdot 9{,}6 + 21{,}8 + 5 \cdot 0 = -28{,}8 + 21{,}8 = -7 \\ 4 \cdot 0 + 16 \cdot 9{,}6 - 7 \cdot 21{,}8 + 3 \cdot 0 = 153{,}6 - 152{,}6 = 1 \\ -2 \cdot 0 - 19 \cdot 9{,}6 + 8 \cdot 21{,}8 + 2 \cdot 0 = -182{,}4 + 174{,}4 = -8 \end{cases}.$$

Решение удовлетворяет всем уравнениям исходной СЛАУ.

Ответ: $\begin{cases} x_3 = 21{,}8 + 8{,}8x_1 + 17{,}8x_4 \\ x_2 = 9{,}6 + 3{,}6x_1 + 7{,}6x_4 \end{cases}$ - общее решение СЛАУ,

$(1; -2; -5; -2)$ - частное решение СЛАУ,

$(0; 9{,}6; 21{,}8; 0)$ - базисное решение СЛАУ.

Задания

Пользуясь методом исключения неизвестных, найти общее решение системы линейных уравнений:

№ п/п	Задание	№ п/п	Задание
1	$\begin{cases} x+2y+3z-13=0, \\ 3x+2y+2z-16=0, \\ 4x-2y-5z+5=0. \end{cases}$	6	$\begin{cases} 2x+3y+z=1, \\ 2x+3y+2z=1, \\ x+2y+4z=1. \end{cases}$
2	$\begin{cases} -x+3y+5z=1, \\ 3x+y+3z=2, \\ 5x+3y-z=-3. \end{cases}$	7	$\begin{cases} 4x-3y+2z=9, \\ 2x+5y-3z=4, \\ 5x+6y-2z=18. \end{cases}$
3	$\begin{cases} 2x+3y=1, \\ x-2z=-4, \\ 3x+y-z=3. \end{cases}$	8	$\begin{cases} 3x+8y=30, \\ 2x+3y-z=8, \\ x+5y+z=22. \end{cases}$
4	$\begin{cases} 4x-3y+2z=11, \\ 2x-1{,}5y+z=5{,}5, \\ 6x-4{,}5y+3z=16{,}5. \end{cases}$	9	$\begin{cases} 3x+8y=30, \\ 2x+3y-z=8, \\ x+13y+z=22. \end{cases}$
5	$\begin{cases} x+y+z=3, \\ 2x-y+z=2, \\ x+4y+2z=5. \end{cases}$	10	$\begin{cases} 2x-3y+4z=20, \\ 3x+4y-2z=-10, \\ 4x+2y+3z=9. \end{cases}$

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение эквивалентных (равносильных) СЛАУ.
2. Назовите элементарные преобразования, не нарушающие равносильности СЛАУ.
3. В чем состоит сущность метода Гаусса для решения СЛАУ? Как осуществляется этот метод? Когда он применим?
4. Что называется общим решение СЛАУ?
5. Какие переменные называются базисными, а какие свободными?
6. Как найти частное решение СЛАУ? Сколько частных решений имеет СЛАУ?
7. Что называется базисным решением СЛАУ? Сколько базисных решений имеет СЛАУ?

Практическая работа №11
«Запись и решение системы n-линейных уравнений в матричной форме. Правило Крамера»

Цель: формирование навыков решения СЛАУ по правилу Крамера и матричным методом.

Теоретические сведения

Правило Крамера решения СЛУ

Найдем определитель матрицы коэффициентов СЛУ Δ, который называется главным определителем СЛУ.

главный определитель СЛУ существует, если матрица коэффициентов СЛУ А является квадратной, т.е. количество переменных СЛУ равно количеству уравнений $(m = n)$.

Если $\Delta \neq 0$, система невырождена, т.е. совместна и определена.

Найдем дополнительные определители СЛУ $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$, заменяя в главном определителе СЛУ столбцы коэффициентов перед соответствующими переменными столбцом свободных членов, т.е.

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

…….

$$\Delta x_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

Найдем значение переменных СЛУ по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta};\ x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}; \dots ; x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta}.$$

Если $\Delta = 0$, то СЛУ либо несовместна, либо имеет бесконечно много решений. В этом случае формулы Крамера применять нельзя, поскольку деление на ноль невозможно.

Матричный метод решения СЛУ

СЛУ из n уравнений с n переменными может быть представлена в виде матричного уравнения: $AX = B$,

где А – матрица коэффициентов СЛУ,

Х – матрица-столбец переменных;

В – матрица-столбец свободных членов.

Решение данного уравнения определяется равенством: $X = A^{-1} \cdot B$.

Поскольку обратная матрица существует только для невырожденных матриц, то необходимо вычислить главный определитель СЛУ. Если $\Delta \neq 0$, то матрица невырожденная и СЛУ будет иметь единственное решение.

Примеры

Задание 1: Показать, что система имеет единственное решение и найти его двумя способами: а) по правилу Крамера;

б) матричным методом.

$$\begin{cases} 2x-3y+z=13 \\ 4x+7y \quad =-13 \\ -x-2y+5z=4 \end{cases}$$

Решение: Данная система имеет размер 3×3 (три уравнения и три неизвестных). Составим матрицу A из коэффициентов при неизвестных:

$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 7 & 0 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Матрица A квадратная (3×3). Вычислим определитель матрицы Δ, используя формулу его разложения по элементам первой строки:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 7 & 0 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}+(-3)\cdot\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=$$

$$=2\cdot 35+(-3)\cdot(-20)+1\cdot(-1)=129.$$

Так как определитель системы $\Delta=129\neq 0$, то данная система имеет единственное решение. Это решение можно найти по правилу Крамера: $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}$; $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}$; $z=\frac{\Delta_z}{\Delta}$, где $\Delta=129$ - главный определитель системы; Δ_x, Δ_y, Δ_z - вспомогательные определители, которые получаются из главного путем замены соответствующего столбца на столбец свободных членов, и вычисляются аналогично определителю Δ.

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 13 & -3 & 1 \\ -13 & 7 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}=13\cdot 7\cdot 5+(-3)\cdot 0\cdot 4+1\cdot(-13)\cdot(-2)-$$

$$-1\cdot 7\cdot 4-(-3)\cdot(-13)\cdot 5-13\cdot 0\cdot(-2)=455+26-28-195=258;$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & 13 & 1 \\ 4 & -13 & 0 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix}=2\cdot(-13)\cdot 5+13\cdot 0\cdot(-1)+1\cdot 4\cdot 4-$$

$$-1\cdot(-13)\cdot(-1)-13\cdot 4\cdot 5-2\cdot 0\cdot 4=-130+16-13-260=-387;$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 13 \\ 4 & 7 & -13 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix}=2\cdot 7\cdot 4+(-3)\cdot(-13)\cdot(-1)+13\cdot 4\cdot(-2)-$$

$$-13\cdot 7\cdot(-1)-(-3)\cdot 4\cdot 4-2\cdot(-13)\cdot(-2)=56-39-104+91+$$

$$+48-52=0.$$

Отсюда по правилу Крамера имеем:

$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{258}{129}=2$; $\qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-387}{129}=-3$;

$z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{0}{129}=0$.

Решение системы единственно, это совокупность чисел $(2;-3\ 0)$.

Проверка: Подставим найденное решение во все уравнения исходной системы линейных алгебраических уравнений.

$$\begin{cases} 2\cdot 2-3\cdot(-3)+1\cdot 0=13 \\ 4\cdot 2+7\cdot(-3) \quad =-13 \\ -1\cdot 2-2\cdot(-3)+5\cdot 0=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13=13 \\ -13=-13 \\ 4=4 \end{cases}$$

Так как все уравнения системы обратились в равенства, то решение найдено верно.

Ответ: $(2;-30)$.

Решим данную систему матричным способом. Рассмотрим матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 7 & 0 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}; \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix}; \qquad B=\begin{pmatrix} 13 \\ -13 \\ 4 \end{pmatrix};$$

A - матрица коэффициентов при неизвестных, X - матрица – столбец неизвестных, B - матрица – столбец свободных членов.

Данную систему можно записать в виде:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 7 & 0 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13 \\ -13 \\ 4 \end{pmatrix};$$

При умножении матриц каждая строка матрицы A умножается на столбец матрицы X и в результате получается соответствующий элемент матрицы B. Таким образом, последняя матричная запись содержит все три уравнения данной системы линейных алгебраических уравнений. Коротко ее можно записать так:

$$A\cdot X=B \qquad (1)$$

Рассмотрим матрицу A^{-1}, обратную к матрице A. Это такая матрица, которая при умножении на данную матрицу A дает единичную матрицу E: $A^{-1}\cdot A=E$, где $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Умножая обе части матричного равенства (2) на матрицу A^{-1} слева, получим:

$$A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B,$$

$$E\cdot X=A^{-1}\cdot B$$

$E\cdot X=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot x & 0\cdot y & 0\cdot z \\ 0\cdot x & 1\cdot y & 0\cdot z \\ 0\cdot x & 0\cdot y & 1\cdot z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=X$, и окончательно имеем:

$$X=A^{-1}\cdot B \qquad (2)$$

Формула (2) используется для нахождения решения системы линейных алгебраических уравнений. Предварительно нужно вычислить обратную матрицу. Обратная матрица вычисляется по формуле: $A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$ (3), где A_{ij} - алгебраическое дополнение всех элементов матрицы A,

Δ - главный определитель системы $(\Delta\neq 0)$.

В нашем примере $\Delta=129\neq 0$.

Найдем теперь алгебраические дополнения для всех элементов матрицы A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}=35; \quad A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}=-20;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}4 & 7\\ -1 & -2\end{vmatrix}=-1;\ A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}-3 & 1\\ -2 & 5\end{vmatrix}=13;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 5\end{vmatrix}=11;\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}2 & -3\\ -1 & -2\end{vmatrix}=7;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 7 & 0\end{vmatrix}=-7;\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 0\end{vmatrix}=4;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & 7\end{vmatrix}=26.$$

Составим матрицу алгебраических дополнений:

$$\begin{pmatrix}35 & -20 & -1\\ 13 & 11 & 7\\ -7 & 4 & 26\end{pmatrix}.$$

Транспонируем ее, то есть поменяем местами столбцы и строки с одинаковыми номерами:

$$\begin{pmatrix}35 & 13 & -7\\ -20 & 11 & 4\\ -1 & 7 & 26\end{pmatrix}.$$

Обратную матрицу получим по формуле (3), умножая каждый элемент последней матрицы на число, равное $\frac{1}{129}$:

$$A^{-1}=\frac{1}{129}\cdot\begin{pmatrix}35 & 13 & -7\\ -20 & 11 & 4\\ -1 & 7 & 26\end{pmatrix}.$$

Решение системы линейных алгебраических уравнений находим по формуле (2) умножением матрицы A^{-1} на матрицу свободных членов B:

$$X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ x\end{pmatrix}=\frac{1}{129}\cdot\begin{pmatrix}35 & 13 & -7\\ -20 & 11 & 4\\ -1 & 7 & 26\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}13\\ -13\\ 4\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{129}\cdot\begin{pmatrix}35\cdot13+13\cdot(-13)-7\cdot4\\ (-20)\cdot13+11\cdot(-13)+4\cdot4\\ (-1)\cdot13+7\cdot(-13)+26\cdot4\end{pmatrix}=\frac{1}{129}\cdot\begin{pmatrix}258\\ -387\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ -3\\ 0\end{pmatrix}$$

Отсюда следует, что $x=2$, $y=-3$, $z=0$.

Найденное решение $(2;-3\,0)$ было проверено выше, и совпадает с результатом, полученным по правилу Крамера.

Ответ: $(2;-3\,0)$ - единственное решение системы.

Задание 2: Решим СЛУ по правилу Крамера и матричным методом:

$$\begin{cases}2x+\ 3y+\ z=\ 14,\\ 3x-\ y+\ 2z=\ 5,\\ x+\ 2y-\ z=\ 7\end{cases}$$

Решение:

1) Составим главный определитель СЛУ.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 16 \neq 0 \Rightarrow$$ система имеет единственное решение.

Составим дополнительные определители СЛУ $\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z$:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 14 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 7 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 32;\ \ \Delta x = \begin{vmatrix} 14 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 7 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 32;\ \ \Delta z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 14 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 16.$$

Найдем значение переменных СЛУ:

$$x = \frac{32}{16} = 2;\ \ y = \frac{48}{16} = 3;\ \ z = \frac{16}{16} = 1.$$

Ответ: (2; 3; 1).

2) Найдем главный определитель СЛУ: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 16 \neq 0 \Rightarrow$ система имеет единственное решение.

Вычислим A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\tilde{A}^T.$$

Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3; \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5; \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5; \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{16} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1; \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -11;$$

$$A^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} -3 & 5 & 7 \\ 5 & -3 & -1 \\ 7 & -1 & -11 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$X = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} -3 & 5 & 7 \\ 5 & -3 & -1 \\ 7 & -1 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 14 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} -42 & +25 & +49 \\ 70 & -15 & -7 \\ 98 & -5 & -77 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 32 \\ 48 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: (2; 3; 1).

Задания

Показать, что система линейных уравнений имеет единственное решение и найти его двумя способами: а) по правилу Крамера;
б) матричным методом.

№ п/п	Задание	№ п/п	Задание
1	$\begin{cases} x+2y+3z-13=0, \\ 3x+2y+2z-16=0, \\ 4x-2y-5z+5=0. \end{cases}$	4	$\begin{cases} 4x-3y+2z=9, \\ 2x+5y-3z=4, \\ 5x+6y-2z=18. \end{cases}$
2	$\begin{cases} -x+3y+5z=1, \\ 3x+y+3z=2, \\ 5x+3y-z=-3. \end{cases}$	5	$\begin{cases} x+2y+3z=1, \\ 2x+3y+z=0, \\ 3x+y+2z=0. \end{cases}$
3	$\begin{cases} 2x+3y=1, \\ x-2z=-4, \\ 3x+y-z=3. \end{cases}$	6	$\begin{cases} 3x+8y=30, \\ 2x+3y-z=8, \\ x+13y+z=22. \end{cases}$

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называется решение СЛАУ?
2. Какие случаи могут представиться при решении СЛАУ?
3. Какие СЛАУ называются совместными, несовместными?
4. Напишите формулы Крамера. В каком случае они применимы?
5. При каком условии СЛАУ имеет единственное решение?
6. Что можно сказать о СЛАУ, если ее определитель равен нулю?
7. Как записать СЛАУ в матричном виде?
8. В чем состоит матричный метод решения СЛАУ?

Практическая работа №12
«Векторное и смешанное произведения векторов»

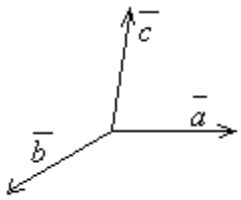
Цель: формирование навыков вычисления векторного и смешанного произведения векторов.

Теоретические сведения

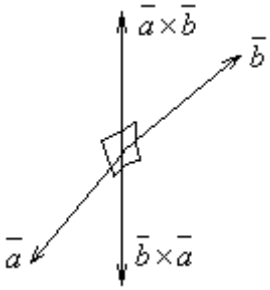
Векторное произведение векторов

Три некомпланарных вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, взятые в указанном порядке, образуют *правую тройку*, если с конца третьего вектора $\bar{c}$ поворот от первого вектора $\bar{a}$ по второму вектору $\bar{b}$ на меньший угол виден против часовой стрелки, и *левую*, если по часовой стрелке.

Векторным произведением вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется *вектор* $\bar{c}$, который удовлетворяет условиям:



левая тройка



1) $\bar{c}\perp\bar{a},\ \bar{c}\perp\bar{b}$

2) $|\bar{c}|=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\sin\alpha =<(\bar{a};\bar{b})$

3) векторы $\bar{a},\bar{b}$ и $\bar{c}$ образуют правую тройку векторов.

Обозначается: $\bar{a}\times\bar{b}$, $[\bar{a},\bar{b}]$

Свойства векторного произведения

1° Антикоммутативность: $\bar{a}\times\bar{b}=-(\bar{b}\times\bar{a})$ (противоположно направлены)

2° $\bar{a}\times\bar{a}=0$

3° $(\alpha\bar{a})\times\bar{b}=\alpha(\bar{a}\times\bar{b})=\bar{a}\times(\alpha\bar{b})$

4° $(\bar{a}+\bar{b})\times\bar{c}=\bar{a}\times\bar{c}+\bar{b}\times\bar{c}$

5° $|\bar{a}\times\bar{b}|=S_{пар-ма}$ (параллелограмм построен на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$)

6° если $\bar{a}\parallel\bar{b}$, то $\bar{a}\times\bar{b}=0$

7° $|\bar{a}\times\bar{b}|^2=|\bar{a}|^2\cdot|\bar{b}|^2-(\bar{a}\cdot\bar{b})^2$

Векторное произведение в координатной форме

Пусть $\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}$,

$\bar{b}=b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k}.$

Тогда

$$\bar{a}\times\bar{b}=\left(\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix};-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\right)$$

или

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

Приложение векторного произведения

1) Установление коллинеарности векторов

$\bar{a}\parallel\bar{b}\Leftrightarrow\bar{a}\times\bar{b}=0$

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}\Leftrightarrow\bar{a}\parallel\bar{b}$$

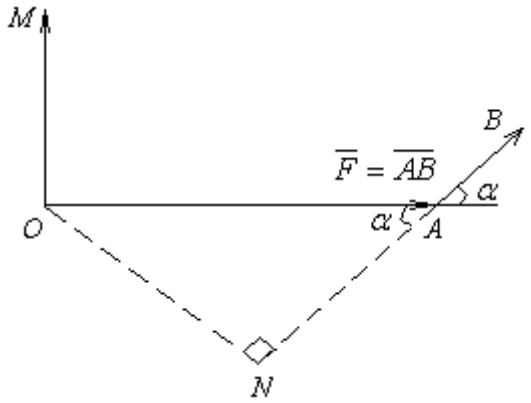
2) Вычисление площади параллелограмма (треугольника), построенного на векторах:

$S_{пар}=|\bar{a}\times\bar{b}|=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\sin\alpha$, где $\alpha=<(\bar{a};\bar{b})$

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}S_{пар}=\frac{1}{2}|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\sin\alpha$$

3) Определение момента силы относительно точки

Пусть в точке A приложена сила $\overline{F} = \overline{AB}$ и т. О – производительная точка пространства. Из функции известно, что *моментом* силы $\overline{F}$ относительно точки О называется вектор $\overline{OM}$, который:



1) перпендикулярен плоскости (OAB)

2) численно равен произведению силы на плечо:

$$\left|\overline{OM}\right| = \left|\overline{F}\right| \cdot ON = \left|\overline{F}\right| \cdot \left|\overline{OA}\right| \sin\alpha = \left|\overline{F}\right|\left|\overline{OA}\right| \sin < \left(\overline{F};\overline{OA}\right)$$

3) образует правую тройку векторов с векторами $\overline{OA}$ и $\overline{AB}$

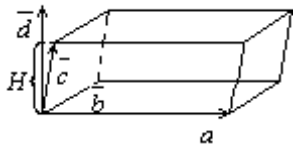
$$\Rightarrow \overline{OM} = \overline{OA} \times \overline{F}$$

Смешанное произведение векторов

Смешанным (векторно-скалярным) произведением векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ называется скалярное произведение векторного произведения векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ на вектор $\overline{c}$.

Геометрический смысл смешанного произведения векторов

Построим параллелепипед на ребрах $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$.



Вектор $\overline{d} = \overline{a} \times \overline{b}$.

Тогда $\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} = \overline{a} \times \overline{b} \cdot \overline{c} = \overline{d} \cdot \overline{c} = \left|\overline{d}\right| \cdot np_{\overline{d}}\overline{c}$

$np_{\overline{d}}\overline{c} = H$, если векторы образуют правую тройку.

$\left|d\right| = \left|\overline{a} \times \overline{b}\right| = S_{пар}$

$$\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} = H \cdot S_{пар} = V_{пар-да}$$

Т.о., смешанное произведение трех векторов равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком «+», если векторы образуют правую тройку, и со знаком «-», если левую.

Свойства смешанного произведения

1° Смешанное произведение не меняется при циклических перестановках векторов:

$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \overline{b}\overline{c}\overline{a} = \overline{c}\overline{a}\overline{b}$ (не меняется ориентация троек)

2° При перестановке местами двух сомножителей смешанное произведение меняет знак:

$\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} = -\overline{b}\overline{c}\overline{a}$

$\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} = -\overline{a}\overline{c}\overline{b}$ (меняется ориентация троек)

$\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} = -\overline{c}\overline{b}\overline{a}$

3° $\left(\overline{a} \times \overline{b}\right) \cdot \overline{c} = \overline{a} \cdot \left(\overline{b} \times \overline{c}\right)$

4° $\left(\overline{a} + \overline{b}\right) \cdot \overline{c}\overline{d} = \overline{a}\overline{c}\overline{d} + \overline{b}\overline{c}\overline{d}$

5° Если векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ - компланарны, $\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} = 0$ ($V_{пар-да} = 0$)

Смешанное произведение в координатной форме

Пусть $\overline{a} = \left(a_x; a_y; a_z\right)$

$\bar{b} = (b_x; b_y; b_z)$

$\bar{c} = (c_x; c_y; c_z)$

Тогда $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} \cdot \bar{c} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$

Приложения смешанного произведения векторов

1) Определение взаимной ориентации векторов в пространстве:

- если $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} > 0$, $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ - правая тройка векторов;
- если $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} < 0$, $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ - левая тройка векторов.

2) Проверка компларности векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ - компларны $\Leftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} = 0$

3) Вычисление объемов параллелепипедов и треугольных пирамид:

$$V_{пар} = \left|\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}\right|;$$

$$V_{пир} = \frac{1}{6} V_{пар} = \frac{1}{6} \left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|.$$

4) Проверка расположения четырех точек *A, B, C* и *D* лежат в одной плоскости: если векторы $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ компланарны, точки *A, B, C, D* лежат в одной плоскости.

Задания

1. При каком значении α векторы $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \alpha\vec{k}$, $\vec{b} = (0;1;0)$ и $\vec{c} = (3;0;1)$ компланарны?
2. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = 3\bar{i} - 2\bar{k}$ и $\bar{b} = \bar{j} - \bar{k}$
3. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = 2i - 3j + 2k$, $\vec{b} = 2j - 3k$ и $\vec{c} = -3i + j - 2k$
4. Найти объем пирамиды и длину высоты, опущенной на грань BCD, если вершины имеют координаты A(0; 0; 1), B(2; 3; 5), C(6; 2; 3), D(3; 7; 2).
5. Выяснить взаимное расположение четырех точек $A_1(3;5;1)$, $A_2(2;4;7)$, $A_3(1;5;3)$, $A_4(4;4;5)$
6. Определить, как сориентированы в пространстве тройки векторов:

   а) $\bar{a}(3;5;7)$; $\bar{b}(-2;6;1)$, $\bar{c} = (-1;0;3)$

   б) $\bar{a}(3;0;-6)$; $\bar{b}(2;-4;0)$, $\bar{c} = (1;-2;0)$

   в) $\bar{a}(2;5;1)$; $\bar{b}(3;-2;4)$, $\bar{c} = (-2;-2;1)$
7. Даны векторы $\vec{a} = \overline{AB}$, где A (-1;1;3), B (2;-4;1), $\vec{b} = i - j + 3k$, $\vec{c}$ =(-4; 3; -1). Найти:

   а) Смешанное произведение векторов

   б) Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
8. Вершинами пирамиды служат точки $A(1;2;3)$, $B(0;-1;1)$, $C(2;5;2)$ и $D(3;0;-2)$. Найти объем пирамиды.
9. Проверить, лежат ли в одной плоскости точки $A(3;-2;0)$, $B(1;-1;2)$, $C(3;-1;1)$ и $D(2;-2;0)$

Вопросы для самоконтроля

1. Запишите формулы для вычисления координат вектора векторного произведения.

2. Как определить, что векторы образуют правую тройку?
3. Как вычислить смешанное произведение векторов?
4. Как с помощью векторного произведения установить коллинеарность векторов?
5. Как с помощью смешанного произведения векторов установить принадлежность четырех точек одной плоскости?

Практическая работа №13
«Итерационные методы решения нелинейных уравнений»

Цель: формирование навыков вычисления корней нелинейных уравнений с заданной точностью.

Теоретические сведения

Метод половинного деления (метод Больцано или метод дихотомии) – один из методов решения нелинейных уравнений и основан на последовательном сужении интервала, содержащего единственный корень уравнения $f(x)=0$. Итерационный процесс выполняется до того момента, пока не будет достигнута заданная точность ξ.

Пусть дано уравнение $f(x)=0$ и определен отрезок $[a_0,b_0]$ такой, что данный отрезок содержит один единственный корень уравнения $x_* \in [a_0,b_0]$. Тогда по концам заданного отрезка функция имеет значения, противоположные по знаку: $sign\ (f(a_0)) \neq sign\ (f(b_0))$. Противоположность знаков значений функции на концах отрезка можно определить множеством способов. Один из множества этих способов — умножение значений функции на концах отрезка и определение знака произведения путём сравнения результата умножения с нулём:

$$f(a_0)\cdot f(b_0)<0.$$

Отрезок $[a_0,b_0]$ называется начальным интервалом неопределенности, потому что известно, что корень ему принадлежит, но его местоположение с требуемой точностью не определено.

Процедура уточнения положения корня заключается в построении последовательности вложенных друг в друга отрезков, каждый из которых содержит корень уравнения. Для этого находится середина текущего интервала неопределенности $c_k=\dfrac{a_k+b_k}{2}$, $k=0,1,2,\ldots$, и в качестве следующего интервала неопределенности из двух возможных выбирается тот, на концах которого функция $f(x)$ имеет разные знаки.

Процесс завершается, когда длина текущего интервала неопределенности становится меньше заданной величины ξ, задающей точность нахождения корня. В качестве приближенного значения корня берется середина последнего интервала неопределенности.

Метод имеет линейную, но безусловную сходимость, и его погрешность за каждую итерацию уменьшается в два раза:

$$|b_k-a_k|=|b_0-a_0|\cdot 2^{-k}$$

Из данного соотношения можно оценить число итераций kдля достижения заданной точности ξ:

$$|b_0 - a_0| \cdot 2^{-k} \le \xi$$

$$k \ge \log_2\left(\frac{|b_0 - a_0|}{\xi}\right)$$

Из полученной формулы можно сделать вывод, что для достижения точности $\xi \approx 10^{-3}$ от длины первоначального промежутка $(b_0 - a_0)$ необходимо выполнить примерно десять итераций.

К достоинствам метода также следует отнести то, что он позволяет найти простой корень уравнения $x_* \in [a_0; b_0]$ любых непрерывных функций $f(x)$ при любых значениях a_0, b_0 таких, что $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$.

Алгоритм нахождения корня нелинейного уравнения по методу половинного деления

1. Найти начальный интервал неопределенности $L_0 = [a_0; b_0]$ одним из методов отделения корней. Задать погрешность расчета (малое положительное число ξ) и начальный шаг итерации ($k = 0$).

2. Найти середину текущего интервала неопределенности:

$$c_k = \frac{a_k + b_k}{2}.$$

3. Необходимо найти значение функции $f(x)$ в точках a_k, b_k и c_k. Далее необходимо проверить два условия:

- если выполняется условие $f(a_k) \cdot f(c_k) < 0$, то искомый корень находится внутри левого отрезка положить $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = c_k$;

- если выполняется условие $f(c_k) \cdot f(b_k) < 0$, то искомый корень находится внутри правого отрезка принять $a_{k+1} = c_k$, $b_{k+1} = b_k$.

В результате находится новый интервал неопределенности, на котором находится искомых корень уравнения:

$$L_{k+1} = [a_{k+1}; b_{k+1}].$$

4. Проверяем новый отрезок на предмет заданной точности, в случае:

- если длина нового отрезка меньше заданной точности $(b_{k+1} - a_{k+1} \le \xi)$, то итерационный процесс заканчивается. Приближенное значение корня определяется по формуле:

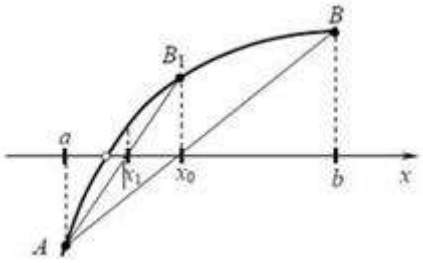
$$x_* = \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}.$$

- если длина нового отрезка не достигает необходимой точности $(b_{k+1} - a_{k+1} > \xi)$, то необходимо продолжить итерационный процесс $(k = k+1)$ и перейти к п.2 рассматриваемого алгоритма.

Метод хорд (метод секущих) – один из методов решения нелинейных уравнений и основан на последовательном сужении интервала, содержащего единственный корень уравнения $f(x) = 0$. Итерационный процесс выполняется до того момента, пока не будет достигнута заданная точность ξ.

В отличие от метода половинного деления, метод хорд предлагает, что деление рассматриваемого интервала будет выполняться не в его середине, а в точке пересечения хорды с осью абсцисс (ось - X). Следует отметить, что под хордой понимается отрезок, который проведен через точки рассматриваемой функции по концам рассматриваемого интервала. Рассматриваемый метод обеспечивает более быстрое нахождение корня, чем метод половинного деления, при условии задания одинакового рассматриваемого интервала.

Геометрически метод хорд эквивалентен замене кривой $y = f(x)$ хордой, проходящей через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.



Уравнение прямой (хорды), которая проходит через точки А и В имеет следующий вид:

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}$$

Данное уравнение является типовым уравнением для описания прямой вы декартовой системе координат. Наклон кривой задается по ординате и абсциссе с помощью значений в знаменателе $(b-a)$ и $(f(b)-f(a))$, соответственно.

Для точки пресечения прямой с осью абсцисс $(x = x_0, y = 0)$ записанное выше уравнение перепишется в следующем виде:

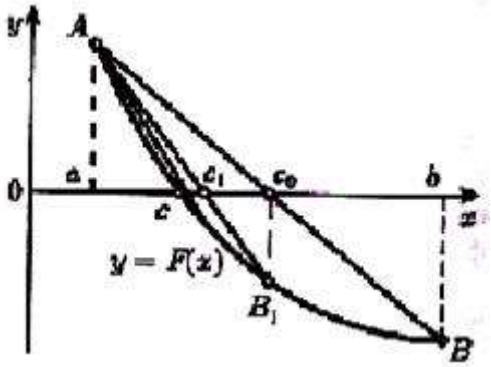
$$x_0 = a - \frac{f(a)}{f(b)-f(a)} \cdot (b-a)$$

В качестве нового интервала для прохождения итерационного процесса выбираем один из двух $[a, x_0]$ или $[x_0, b]$, на концах которого функция $f(x)$ принимает значения разных знаков. Противоположность знаков значений функции на концах отрезка можно определить множеством способов. Один из множества этих способов — умножение значений функции на концах отрезка и определение знака произведения путём сравнения результата умножения с нулём:

$$f(a) \cdot f(x_0) < 0 \text{ или } f(x_0) \cdot f(b) < 0.$$

Итерационный процесс уточнения корня заканчивается, когда условие близости двух последовательных приближений станет меньше заданной точности, т.е.

$$|c_{k+1} - c_k| < \xi.$$



Алгоритм нахождения корня нелинейного уравнения по методу хорд

1. Найти начальный интервал неопределенности $L_0 = [a_0; b_0]$ одним из методов отделения корней. Задать погрешность расчета (малое положительное число ξ) и начальный шаг итерации ($k = 0$).

2. Найти точку пересечения хорды с осью абсцисс:

$$c_k = a_k - \frac{f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)} \cdot (b_k - a_k)$$

3. Необходимо найти значение функции $f(x)$ в точках a_k, b_k и c_k. Далее необходимо проверить два условия:

- если выполняется условие $f(a_k) \cdot f(c_k) < 0$, то искомый корень находится внутри левого отрезка положить $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = c_k$;

- если выполняется условие $f(c_k) \cdot f(b_k) < 0$, то искомый корень находится внутри правого отрезка принять $a_{k+1} = c_k$, $b_{k+1} = b_k$.

В результате находится новый интервал неопределенности, на котором находится искомых корень уравнения:

$$L_{k+1} = [a_{k+1}; b_{k+1}]$$

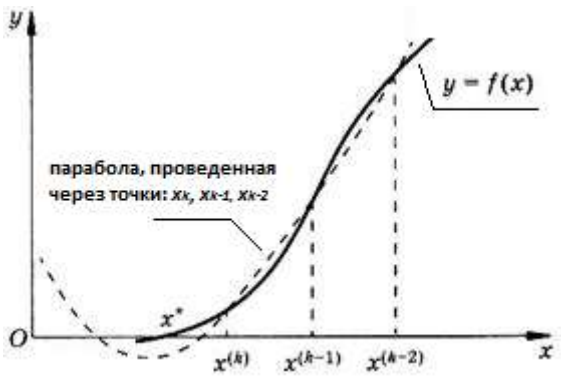
4. Проверяем приближенное значение корня уравнения на предмет заданной точности, в случае:

- если разность двух последовательных приближений станет меньше заданной точности $|c_{k+1} - c_k| < \xi$, то итерационный процесс заканчивается. Приближенное значение корня определяется по формуле:

$$x_* = a_{k+1} - \frac{f(a_{k+1})}{f(b_{k+1}) - f(a_{k+1})} \cdot (b_{k+1} - a_{k+1})$$

- если разность двух последовательных приближений не достигает необходимой точности $|c_{k+1} - c_k| > \xi$, то необходимо продолжить итерационный процесс $(k = k+1)$ и перейти к п.2 рассматриваемого алгоритма.

Метод парабол (**метод Мюллера**) является итерационным численным методом решения нелинейного уравнения $f(x) = 0$ непрерывной функции. Он основан на замене исходной функции $f(x)$ интерполяционным многочленом второй степени (параболой), который строится по трем последовательным точкам (x_k, x_{k-1} и x_{k-2}). В качестве приближенного значения корня функции $f(x)$ используется точка пересечения параболы и оси абсцисс (x).



Интерполяционный многочлен записывается в форме Ньютона, который применяется для полиномиального интерполирования. В общем виде интерполяционный многочлен записывается следующей формулой:

$$P_n(x) = A_0 + A_1 \cdot (x - x_k) + A_2 \cdot (x - x_k) \cdot (x - x_{k-1}) + \ldots + A_n \cdot (x - x_k) \cdot (x - x_{k-1}) \ldots (x - x_{k-n})$$

где k- точка в которой функция заменяется интерполяционным многочленом A_0, A_1, A_2, …, A_n - коэффициенты уравнения, которые вычисляются по следующим формулам:

$$A_0 = f(x_k)$$

$$A_1 = \frac{f(x_{k-1}) - f(x_k)}{x_{k-1} - x_k} = f(x_k, x_{k-1})$$

$$A_2 = \frac{\dfrac{f(x_{k-2}) - f(x_{k-1})}{x_{k-2} - x_{k-1}} - \dfrac{f(x_{k-1}) - f(x_k)}{x_{k-1} - x_k}}{x_{k-2} - x_k} = \frac{f(x_{k-1}, x_{k-2}) - f(x_k, x_{k-1})}{x_{k-2} - x_k} = f(x_k, x_{k-1}, x_{k-2})$$

$$A_n = \frac{f(x_k, \ldots, x_{k-n}) - f(x_k, \ldots, x_{k-1})}{x_{k-n} - x_k}$$

Далее будем считать, что парабола строится по трем точкам, которые расположены в заданном интервале локализации $[a;b]$:

- по двум крайним точкам интервала: $x_k = a$, $x_{k-2} = b$;
- по средней точке $x_{k-1} = \dfrac{a+b}{2} = c$.

В соответствии с условиями задачи интерполяционный многочлен второй степени будет записываться в виде следующего уравнения:

$$P_n(x) = f(a) + f(a,c) \cdot (x - a) + f(a,c,b) \cdot (x - a) \cdot (x - c)$$

Преобразуем данное уравнение к квадратному виду:

$$P_n(x) = f(a) + f(a,c) \cdot (x - a) + f(a,c,b) \cdot (x - a) \cdot (x - a + a - c)$$

$$P_n(x) = f(a) + \left[f(a,c) + f(a,c,b) \cdot (a - c)\right] \cdot (x - a) + f(a,c,b) \cdot (x - a)^2$$

$$P_n(x) = A \cdot (x - a)^2 + B \cdot (x - a) + C,$$

где коэффициенты уравнения вычисляются следующим образом

$$A = f(a,c,b) = \frac{\dfrac{f(b) - f(c)}{b - c} - \dfrac{f(c) - f(a)}{c - a}}{b - a}$$

$$B = f(x_1, x_3) + f(x_1, x_3, x_2) \cdot (x_1 - x_3) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} + \frac{\dfrac{f(b) - f(c)}{b - c} - \dfrac{f(c) - f(a)}{c - a}}{b - a} \cdot (a - c)$$

$$C = f(a)$$

Интерполяционный многочлен второй степени $P_n(x)$ пересекает ось абсцисс в двух точках, которые определяются из решения квадратного уравнения:

$$x^* - x_k = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4 \cdot A \cdot C}}{2 \cdot A}$$

В результате решения квадратного уравнения получили два корня. Рассмотрим подробно каждый из представленных корней уравнения.

› Первый корень уравнения определяется по формуле:

$$x^* - x_k = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4 \cdot A \cdot C}}{2 \cdot A} \cdot \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4 \cdot A \cdot C}}{-B - \sqrt{B^2 - 4 \cdot A \cdot C}} =$$

$$= \frac{B^2 - B^2 + 4 \cdot A \cdot C}{2 \cdot A \cdot (-B - \sqrt{B^2 - 4 \cdot A \cdot C})} = \frac{-2 \cdot C}{B + \sqrt{B^2 - 4 \cdot A \cdot C}}$$

› Второй корень уравнения определяется по формуле:

$$x^* - x_k = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4 \cdot A \cdot C}}{2 \cdot A} \cdot \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4 \cdot A \cdot C}}{-B + \sqrt{B^2 - 4 \cdot A \cdot C}} =$$

$$= \frac{B^2 - B^2 + 4 \cdot A \cdot C}{2 \cdot A \cdot (-B + \sqrt{B^2 - 4 \cdot A \cdot C})} = \frac{-2 \cdot C}{B - \sqrt{B^2 - 4 \cdot A \cdot C}}$$

В результате получим общую запись формулы, которая используется для нахождения двух точек пересечения параболы с осью абсцисс.

$$x^* = x_k - \frac{2 \cdot C}{B \pm \sqrt{B^2 - 4 \cdot A \cdot C}}$$

Дальше из двух найденных значений необходимо выбрать только одно значение, которое находится в рассматриваемом интервале неопределенности $[a; b]$. Выбранное значение будет являться приближенным значением корня функции $f(x) = 0$.

Скорость сходимости метода Мюллера лишь немного превышает порядок сходимости метода хорд (метода секущих). Это означает, что, несмотря на привлечение дополнительной информации о функции, метод парабол не увеличивает существенно порядок сходимости. Вместе с тем возникают задачи решения квадратного уравнения, выбора одного из двух корней многочлена и, самое важное, определения области гарантированной сходимости метода. Если три приближения для построения многочлена выбраны далеко от корня и содержат погрешности, то возможно самое неожиданное поведение решения.

Алгоритм нахождения корня нелинейного уравнения по методу парабол

1. Найти начальный интервал неопределенности $L_0 = [a_0; b_0]$ одним из методов отделения корней. Задать погрешность расчета (малое положительное число ξ) и начальный шаг итерации ($k = 0$).

2. Определить среднюю точку в рассматриваемом интервале и найти значения функции в трех точках: по краям рассматриваемого интервала $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ и в середине интервала $(c, f(c))$.

3. Выполнить расчет приближенного значения корня функции в соответствии с формулой:

$$x_* = a - \frac{2 \cdot C}{B \pm \sqrt{B^2 - 4 \cdot A \cdot C}},$$

где параметра A,B и C определяются следующим образом

$$A = \frac{\frac{f(b)-f(c)}{b-c} - \frac{f(c)-f(a)}{c-a}}{b-a}$$

$$B = \frac{f(c)-f(a)}{c-a} + \frac{\frac{f(b)-f(c)}{b-c} - \frac{f(c)-f(a)}{c-a}}{b-a} \cdot (a-c)$$

$$C = f(a)$$

В результате решения данного уравнения получаем два корня, из которых необходимо выбрать тот, который находится в рассматриваемом интервале неопределенности:

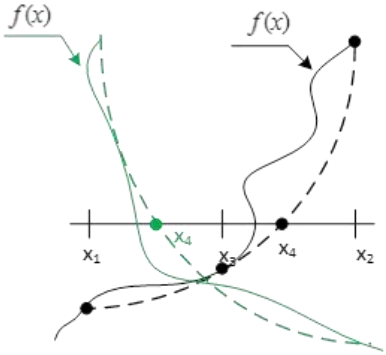
- $x_* = a - \frac{2 \cdot C}{B + \sqrt{B^2 - 4 \cdot A \cdot C}}$ если $x_* \in [a;b]$
- $x_* = a - \frac{2 \cdot C}{B - \sqrt{B^2 - 4 \cdot A \cdot C}}$ если $x_* \in [a;b]$

4. Определяем новый интервал неопределенности на котором находится искомых корень уравнения. При выборе данного интервала исходим из того, что функция $f(x)$ на концах интервала должна принимать значение разных знаков.

В соответствии с данным методом нахождения корня уравнения получается два возможных интервала неопределенности:

1 интервал: если $f(x_1) \cdot f(x_*) < 0$, то новый интервал $\{x_1, x_*\}$

2 интервал: если $f(x_*) \cdot f(x_2) < 0$, то новый интервал $\{x_*, x_2\}$

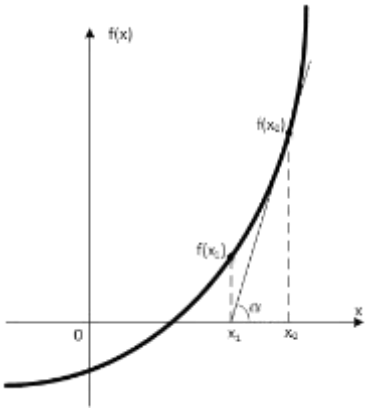


5. Проверяем приближенное значение корня на предмет заданной точности, в случае:

- если разность двух последовательных приближений станет меньше заданной точности $\left|x_*^{\,k} - x_*^{\,k-1}\right| < \xi$, то итерационный процесс заканчивается.
- если разность двух последовательных приближений не достигает необходимой точности $\left|x_*^{\,k} - x_*^{\,k-1}\right| > \xi$, то необходимо продолжить итерационный процесс $(k = k+1)$ и перейти к п.2 рассматриваемого алгоритма.

Метод Ньютона (метод касательных) — это итерационный численный метод нахождения корня (нуля) заданной функции.

В соответствии с данным методом задача поиска корня функции $f(x)$ сводится к задаче поиска точки пересечения с осью абсцисс касательной, построенной к графику функции $f(x)$.



Проведенная в любой точке касательная линия к графику функции определяется производной данной функции в рассматриваемой точке, которая в свою очередь определяется тангенсом угла α ($tg(\alpha) = f'(x_0)$). Точка пересечения касательной с осью абсцисс определяется исходя из следующего соотношения в прямоугольном треугольнике: тангенс угла α в прямоугольном треугольнике определяется отношением противолежащего катета к прилежащему катету треугольнику. Таким образом, на каждом шаге строится касательная к графику функции в точке очередного приближения x_i.Точка пересечения касательной с осью Ох будет являться следующей точкой приближения x_{i+1}. В соответствии с рассматриваемым методом расчет приближенного значения корня на i-итерации производится по формуле:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{1}{f'(x_i)} \cdot f(x_i)$$

Наклон прямой подстраивается на каждом шаге наилучшим образом, однако следует обратить внимание на то, что алгоритм не учитывает кривизну графика и, следовательно, в процессе расчета остается неизвестно в какую сторону может отклониться график.

Условием окончания итерационного процесса является выполнение следующего условия:

$$|x_{i+1} - x_i| \le \varepsilon,$$

где ε - допустимая погрешность определения корня.

Алгоритм нахождения корня нелинейного уравнения по методу Ньютона для уравнения с одной переменной

1. Задать начальную точку приближенного значения корня функции x_0, а также погрешность расчета (малое положительное число ξ) и начальный шаг итерации ($k = 0$).

2. Выполнить расчет приближенного значения корня функции в соответствии с формулой:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1}{f'(x_k)} \cdot f(x_k)$$

3. Проверяем приближенное значение корня на предмет заданной точности, в случае:

- если разность двух последовательных приближений станет меньше заданной точности $\left|x_*^{\,k} - x_*^{\,k-1}\right| < \xi$, то итерационный процесс заканчивается.

- если разность двух последовательных приближений не достигает необходимой точности $\left|x_*^{\,k} - x_*^{\,k-1}\right| > \xi$, то необходимо продолжить итерационный процесс $(k = k+1)$ и перейти к п.2 рассматриваемого алгоритма.

Задания

1. Решить уравнение $f(x) = x^2 - \ln(x) - 2 \cdot \cos(x) - 1$ методом хорд. Корень необходимо найти в диапазоне $x_* \in [1;4]$ с точностью $\xi \approx 0{,}001$.
2. Решить уравнение $f(x) = x^2 - \ln(x) - 2 \cdot \cos(x) - 1$ методом Ньютона. Корень необходимо найти с точностью $\xi \approx 0{,}001$ в качестве первого приближения $x_0 = 4$.
3. Решить уравнение $f(x) = x^2 - \ln(x) - 2 \cdot \cos(x) - 1$ методом парабол. Корень необходимо найти в рассматриваемом диапазоне $x_* \in [1;4]$ с точностью $\xi \approx 0{,}001$
4. Решить уравнение $f(x) = x^2 - \ln(x) - 2 \cdot \cos(x) - 1$ методом половинного деления. Корень необходимо найти в рассматриваемом диапазоне $x_* \in [1;4]$ с точностью $\xi \approx 0{,}001$

.

Вопросы для самоконтроля

1. Объясните суть метода половинного деления для решения нелинейных уравнений.
2. Сформулируйте алгоритм применения метода половинного деления для решения нелинейных уравнений.
3. Объясните суть метода хорд для решения нелинейных уравнений.
4. Сформулируйте алгоритм применения метода хорд для решения нелинейных уравнений.
5. Объясните суть метода касательных для решения нелинейных уравнений.
6. Сформулируйте алгоритм применения метода касательных для решения нелинейных уравнений.
7. Объясните суть метода парабол для решения нелинейных уравнений.
8. Сформулируйте алгоритм применения метода парабол для решения нелинейных уравнений.

Практическая работа №14
«Использование интерполяционных многочленов Лагранжа и Ньютона при решении задач»

Цель: формирование навыков проведения приближенных вычислений с помощью полиномов Лагранжа и Ньютона

Теоретические сведения

Пусть функция $f(x)$ задана набором точек (x_i, y_i) на интервале $[a,b]$:

$y_i = f(x_i)$, $i = 0,1,\ldots,n$, $a \le x_i \le b$

Задача интерполяции – найти функцию $F(x)$, принимающую в точках x_i те же значения y_i. Тогда, **условие интерполяции**:

$F(x_i) = y_i$ При этом предполагается, что среди значений x_i нет одинаковых. Точки x_i называют **узлами интерполяции**.

Если $F(x)$ ищется только на отрезке $[a,b]$ – то это задача **интерполяции**, а если за пределами первоначального отрезка, то это задача **экстраполяции**.

Задача нахождения интерполяционной функции $F(x)$ имеет много решений, так как через заданные точки x_i, y_i можно провести бесконечно много кривых, каждая из которых будет графиком функции, для которой выполнены все условия интерполяции. Для практики важен случай интерполяции функции многочленами:

$$F(x) = P_m(x_i) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \ldots + a_m \cdot x^m, \quad i = 0,1,\ldots,m$$

При этом искомый полином называется **интерполяционным полиномом.**

При построении одного многочлена для всего рассматриваемого интервала $[a,b]$ для нахождения коэффициентов многочлена необходимо решить систему уравнений, построенную на основе полинома (3.3). Данная система содержит $n+1$ уравнение, следовательно, с ее помощью можно определить $n+1$ коэффициент. Поэтому максимальная степень интерполяционного многочлена $m = n$, и многочлен принимает вид

$$P_n(x_i) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \ldots + a_n \cdot x^n, \quad i = 0,1,\ldots,n$$

Многочлен Лагранжа

При глобальной интерполяции на всем интервале $[a,b]$ строится единый многочлен. Одной из форм записи интерполяционного многочлена для глобальной интерполяции является многочлен Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot l_i(x)$$

где $l_i(x)$ – базисные многочлены степени *n*:

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}$$

То есть многочлен Лагранжа можно записать в виде:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Многочлен $l_i(x)$ удовлетворяет условию $l_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$. Это условие означает, что многочлен равен нулю при каждом x_j кроме x_i, то есть $x_0, x_1, \ldots x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_n$ – корни этого многочлена. Таким образом, степень многочлена $L_n(x)$ равна *n* и при $x \neq x_i$ обращаются в ноль все слагаемые суммы, кроме слагаемого с номером $i = j$, равного y_i.

Выражение применимо как для равноотстоящих, так и для не равноотстоящих узлов. Погрешность интерполяции методом Лагранжа зависит от свойств функции $f(x)$, от расположения узлов интерполяции и точки *x*. Полином Лагранжа имеет малую погрешность при небольших значениях *n* (*n*<20). При больших *n* погрешность начинает расти, что свидетельствует о том, что метод Лагранжа не сходится (то есть его погрешность не убывает с ростом *n*).

Многочлен Лагранжа в явном виде содержит значения функций в узлах интерполяции, поэтому он удобен, когда значения функций меняются, а узлы интерполяции неизменны. Число арифметических операции, необходимых для построения многочлена Лагранжа, пропорционально n^2 и является наименьшим для всех форм записи. К недостаткам этой формы записи можно отнести то, что с изменением числа узлов приходится все вычисления проводить заново.

Кусочно-линейная и кусочно-квадратичная локальные интерполяции являются частными случаями интерполяции многочленом Лагранжа.

Многочлен Ньютона

Другая форма записи интерполяционного многочлена – интерполяционный многочлен Ньютона с разделенными разностями. Пусть функция $f(x)$ задана с произвольным шагом, и точки таблицы значений пронумерованы в произвольном порядке.

Разделенные разности нулевого порядка совпадают со значениями функции в узлах. Разделенные разности первого порядка определяются через разделенные разности нулевого порядка:

$$f(x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

Разделенные разности второго порядка определяются через разделенные разности первого порядка:

$$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}) - f(x_i, x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i}$$

Разделенные разности *k*-го порядка определяются через разделенные разности порядка $k-1$:

$$f(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}) = \frac{f(x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}) - f(x_i, \ldots, x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_i}$$

Используя понятие разделенной разности интерполяционный многочлен Ньютона можно записать в следующем виде:

$$P_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)\cdot(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)\cdot(x - x_0)\cdot(x - x_1) + \ldots +$$
$$+ f(x_0, x_1, \ldots, x_n)\cdot(x - x_0)\cdot(x - x_1)\ldots\cdot(x - x_{n-1})$$

За точностью расчета можно следить по убыванию членов суммы.. Если функция достаточно гладкая, то справедливо приближенное равенство $f(x) - P_n(x) \approx P_{n+1}(x) - P_n(x)$. Это приближенное равенство можно использовать для практической оценки погрешности интерполяции: $\varepsilon_n = \left|P_{n+1}(x) - P_n(x)\right|$.

Задания

1. Найти интерполяционный многочлен Ньютона для функции $f(x) = 2^x$ По ее значениям в точках $x_0 = -1,\ x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 3$ и вычислить $f(-0{,}5)$
2. Найти интерполяционный многочлен Ньютона для функции $y = f(x)$, если известны ее значения: $f(1) = 6,\ f(3) = 24,\ f(4) = 45.$
3. Провести интерполяцию многочленом Лагранжа функции, заданной в таблице.

i	0	1	2	3	4
x_i	-4	-3	-2	-1	0
$f(x_i)$	2	0	1	-1	-3

Вопросы для самоконтроля

1. Объясните суть метода интерполяции.
2. Что такое узел интерполяции?
3. Запишите формулу интерполяционного многочлена Лагранжа.
4. Запишите формулу интерполяционного многочлена Ньютона.
5.

Практическая работа №15
«Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах»

Цель: формирование навыков выполнения действий над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической формах

Теоретические сведения

Комплексными числами называются числа вида $a+bi$, где a и b - действительные числа, а число i, определяемое равенством $i^2=-1$, называется *мнимой единицей*.

Запись комплексного числа в виде $z=a+bi$ называется *алгебраической формой* записи комплексного числа.

Представление комплексного числа в виде $z=r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, где $r>0$, называется *тригонометрической формой* записи комплексного числа.

Произведение комплексных чисел $z_1=r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ и $z_2=r_2\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ находится по формуле:

$$r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=r_1\cdot r_2\cdot[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)] \text{ то есть}$$

$$|z_1z_2|=r_1\cdot r_2=|z_1|\cdot|z_2|,\ \arg(z_1z_2)=\varphi_1+\varphi_2.$$

Таким образом, *при умножении двух комплексных числе, заданных в тригонометрической форме, их модули перемножаются, а аргументы складываются.*

Частное комплексных чисел $z_1=r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ и $z_2=r_2\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ находится по формуле:

$$\frac{r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)],$$

то есть

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{r_1}{r_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|},\ \arg\frac{z_1}{z_2}=\varphi_1-\varphi_2.$$

Таким образом, *при делении комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули делятся, аргументы вычитаются.*

При возведении комплексного числа $r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ в n-ую степень используется формула

$$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi),\ n\in Z,$$

которая называется формулой Муавра.

Для извлечения корня n-ой степени из комплексного числа $r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ используется формула

$$z_k = \sqrt[n]{r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right),$$

где $\sqrt[n]{r}$ - арифметический корень, $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

Степень e^z с комплексным показателем $z = x + yi$ определяется равенством

$$e^z = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

Можно доказать, что

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y),$$

то есть

$$e^{x+iy} = \cos y + i\sin y.$$

В частности, при $x = 0$ получается соотношение

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y,$$

которое называется ф о р м у л о й Э й л е р а.

Пример

Задание: Даны комплексные числа $z_{1=1+i}$ и $z_2=\sqrt{3}+i$.

Вычислить: а) $z_1 + z_2$; б) $z_1 - z_2$; в) $z_1 \cdot z_2$; г) $z_1 : z_2$; д) представить число z_1 в тригонометрической форме; е) вычислить $\sqrt{z_1}$.

Решение:

а) $z_1+z_2 =(1+i)+(\sqrt{3}+i)=(1+\sqrt{3})+2i\approx 2{,}7+2i$

б) $z_1-z_2 =(1+i)-(\sqrt{3}+i)=1-\sqrt{3})+0i\approx -0{,}7$

в) $z_1*z_2 =(1+i)*(\sqrt{3}+i)=\sqrt{3}+i\sqrt{3}+1i+i^2 = \sqrt{3}+i(\sqrt{3}+1)-1 = (\sqrt{3}-1)+$ $+i(\sqrt{3}+1) \approx 0{,}7+2{,}7i$

г) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i} = \frac{(1+i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \frac{\sqrt{3}+i\sqrt{3}-1i-i^2}{(\sqrt{3})^2-i^2} = \frac{(\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-1)}{3+1} \approx \frac{2{,}7+0{,}7i}{4} \approx 0{,}675+0{,}175i$

д) для того, чтобы представить число $z_{1=}1+i$ в тригонометрической форме, необходимо найти модуль этого числа **r** и его аргумент ***φ* по формулам:**

$r = \sqrt{a^2+b^2}$, $\varphi = \alpha = arctg\frac{b}{a}$ ($\varphi = \alpha$, т.к. вектор комплексного числа z_1 лежит в1 четверти).

Примечание. Если вектор комплексного числа лежит во 2 четверти, то $\varphi = \pi - \alpha$; если вектор комплексного числа лежит во 3 четверти, то $\varphi = \pi + \alpha$; если вектор комплексного числа лежит во 4 четверти, то $\varphi = 2\pi - \alpha$,

$$z_{1=}1+i=\left[\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 1 \end{array}\right. \to r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\varphi = \alpha = arctg\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$$

Так как тригонометрическая форма комплексного числа записывается формулой $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то для нашего числа получаем:$z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$.

е) используем формулы:

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

Т.к. в нашем случае n=2, то k=0;1;$z=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$, то получим: $z_0=\sqrt[4]{2}(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi 0}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi 0}{2})=\sqrt[4]{2}(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8})$

$$z_1=\sqrt[4]{2}(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi\times 1}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi\times 1}{2})=\sqrt[4]{2}(\cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{9\pi}{8})$$

Задания

Даны комплексные числа z_1 и z_2. Вычислить: а) z_1+z_2; б) z_1-z_2; в) $z_1\cdot z_2$; г) $z_1:z_2$; д) представить число z_1 в тригонометрической форме; е)$\sqrt{z_1}$.

1	$z_1=3+3i$ $z_2=-2+2\sqrt{3}i$	2	$z_1=-2+2\sqrt{3}i$ $z_2=-1+i$	3	$z_1=2-2i$ $z_2=\sqrt{3}-i$	4	$z_1=-\sqrt{3}-i$ $z_2=1-i$	5	$z_1=-1+i$ $z_2=-\sqrt{3}+i$
6	$z_1=1-\sqrt{3}i$ $z_2=2-2i$	7	$z_1=\sqrt{3}-i$ $z_2=3+3i$	8	$z_1=1-i$ $z_2=2-2\sqrt{3}i$	9	$z_1=-\sqrt{3}+i$ $z_2=-1+i$	10	$z_1=2-2\sqrt{3}i$ $z_2=\sqrt{3}-i$

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение комплексного числа.
2. Какие числа называются комплексно – сопряженными?
3. Какие комплексные числа называются равными?
4. Как изображаются комплексные числа геометрически?
5. Дайте определение модуля и аргумента комплексного числа.
6. Дайте определение тригонометрической формы комплексного числа.
7. Как умножаются и делятся комплексные числа, заданные в тригонометрической форме?
8. Как возводится в степень комплексное число, заданное в тригонометрической форме?
9. По какой формуле извлекается корень n-ой степени из комплексного числа, заданного в тригонометрической форме?

Практическая работа №16
«Решение задач на вычисление предела последовательности»

Цель: формирование навыков решения задач на вычисление предела последовательностей.

Теоретические сведения

Числовые последовательность – это числовая функция натурального аргумента, т.е. последовательность, элементами которой являются числа.

Например, $\{2;4;6;...\}$ – последовательность четных положительных чисел – числовая последовательность.

Способы задания последовательности

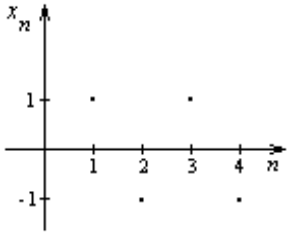
Поскольку последовательность содержит бесконечно много элементов, ее нельзя задать перечислением всех ее элементов. Для ее задания определены следующие способы:

1. *табличный*;
2. *аналитический* (с помощью общего члена)

Например, $a_n=\frac{(-1)^n}{n}$; $a_n=\frac{(-1)^n+1}{2^n}$; $x_n=(-1)^{n+1}$; $x_n=1$; $x_n=a+(n-1)\cdot b$ – арифметическая прогрессии

3. *рекуррентный*, когда всякий последующий член последовательности выражается через один или несколько предыдущих; при этом обязательно задается один или несколько первых ее членов.

4. *графический*



5. *словесный*

Например, последовательность простых чисел

Подпоследовательность

Если из последовательности выбрать члены с определенными номерами, (например, четными), получим *подпоследовательность*. Важно, что при этом каждый следующий номер больше предыдущего.

Например, $]\{x_n\} = n;\ x_{2k} = \{2;4;6;...\};\ x_{2k} = \{1;3;5;...\};\ x_k = \{1;4;9;16;...\}$

Виды последовательностей

Ограниченные последовательности

Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху, если существует такое число $M \in R$, что $\forall n \in N$ выполняется неравенство $x_n \le M$.

M – верхняя грань последовательности

Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной снизу, если существует такое число $m \in R$, что $\forall n \in N$ выполняется неравенство $x_n \le m$.

m – нижняя грань последовательности

Последовательность, ограниченная сверху и снизу, называется *ограниченной*.

Например,

1) $\{x_n\} = \{n\} = \{1,2,3,4,5...,n,...\}$ – ограничена снизу; $m = 1$

2) $\{x_n\} = \{-n\} = \{-1;-2;-3;...;-n,...\}$ – ограничена; $m = 0$; $M = -1$.

3) $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};...;\frac{1}{n};...\right\}$ – ограничена; $m = 0$; $M = 1$.

4) $\{x_n\} = \left\{\frac{n-1}{n}\right\} = \left\{0;\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4};...;\frac{n-1}{n};...\right\}$ – ограничена; $m = 0$; $M = 1$.

Монотонные последовательности

Последовательность называется *возрастающей*, если $\forall n \in n \quad x_{n+1} > x_n$; *обозначается* $\uparrow \{x_n\}$ Например, $\{x_n\} = \{1;2;3;4;5;...;n;...\}$

Последовательность называется *неубывающей*, если $\forall n \in n \quad x_{n+1} \ge x_n$; *обозначается* $]\downarrow \{x_n\}$ Например, $\{x_n\} = \{1;1;2;2;3;3;...;n;n;...\}$

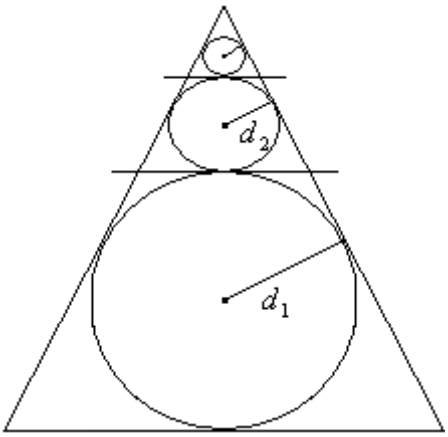
Последовательность называется *убывающей*, если $\forall n \in n \quad x_{n+1} < x_n$; *обозначается* $\downarrow \{x_n\}$ Например, $\{x_n\} = \left\{1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};...;\frac{1}{n};...\right\}$

Последовательность называется *невозрастающей*, если $\forall n \in n \quad x_{n+1} < x_n$; *обозначается* $\rceil\uparrow \{x_n\}$ Например, $\{x_n\} = \{1;1;1;...;1;...\}$

Все эти последовательности называются *монотонными*.

Например, $\{x_n\} = (-1)^n \cdot n = \{-1;2;-3;4;-5;...;(-1)^n n;...\}$ – немонотонная.

Предел числовой последовательности



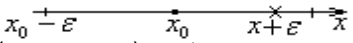
Построим равнобедренный треугольник и впишем в него окружность радиуса d_1. Проведем касательную к вписанной окружности параллельно основанию треугольника. В полученный равнобедренный треугольник снова впишем окружность радиуса d_2. Будем продолжать этот процесс, получая все более маленькие треугольники и окружности. Теоретически процесс можно продолжать до бесконечности. Т.о., можно построить последовательность $\{d_n\} = \{d_1, d_2, d_3, ...d_n, ...\}$.

Каким бы тонким карандашом не пользоваться, уже через несколько шагов окружности будут неотличимы от точки: диаметр все уменьшается, приближаясь к 0. При этом на каждом шаге диаметр вписанной окружности имеет вполне определенное положительное значение. Говорят, что последовательность диаметров стремится к нулю. В данном случае предел последовательности d_n равен 0.

Для строгого определения предела рассмотрим понятие ε – ***окрестности***.

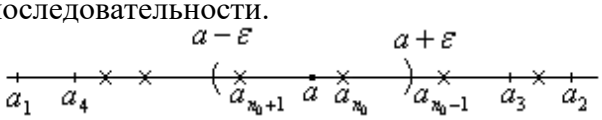
ε – ***окрестностью*** точки x_0 называют открытый интервал вида $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$, $\underline{\varepsilon > 0}$

Если x принадлежит ε – окрестности точки x_0, то $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$ или $|x - x_0| < \varepsilon$.



$$\left(\lim_{n\to\infty} a_n = a\right) \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0 \ \exists_{n_0 \in N} \left| \forall_{n \in N} \left[(n > n_0) \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon\right]\right.\right)$$

Если a – предел числовой последовательности a_n, то какую бы ε – окрестность числа a мы не взяли, все члены последовательности, начиная с некоторого номера, лежат внутри этой окрестности, а вне ε – окрестности может лежать только конечное число членов последовательности.



Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*.

Т.о., «доказать по определению», что a – предел последовательности $\{a_n\}$, означает указать способ определения по любому числу $\varepsilon > 0$ номера n_0, начиная с которого все члены последовательности не выходят за пределы ε – окрестности a, т.е. решить неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$ относительно n.

Свойства сходящихся последовательностей

1° Если $a_n = c \forall_{n \in N}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$

Например, $x_n = 1$ – последовательность, состоящая из 1.

Все элементы этой последовательности совпадают и лежат в ε – окрестности 1 $\forall \varepsilon > 0$.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1.$

2° Если последовательность имеет предел, то она ограничена.

3° Если последовательность имеет предел, то он единственный.

Действия над числовыми последовательностями

1) $c = const \ c\{a_n\} = \{ca_n\};$

2) $\{a_n\} \pm \{b_n\} = \{a_n \pm b_n\};$

3) $\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \{a_n \cdot b_n\};$

4) $\dfrac{\{a_n\}}{\{b_n\}} = \left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}, \ b_n \neq 0 \ \ \forall_n \in N$

Пример

Задание: Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+2}{5n^2-2} = \dfrac{3}{5}$.

Решение: Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+2}{5n^2-2} = \dfrac{3}{5}$, т.е. найти такое $N(\varepsilon)$, начиная с которого $(n \geq N(\varepsilon))$ выполнится неравенство $\left|\dfrac{3n^2+2}{5n^2-2} - \dfrac{3}{5}\right| < \varepsilon$

$$\left|\frac{3n^2+2}{5n^2-2} - \frac{3}{5}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{5(3n^2+2) - 15n^2+6}{5(5n^2-2)}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{\cancel{15n^2}+10-\cancel{15n^2}+6}{5(5n^2-2)}\right| < \varepsilon$$

$$\frac{16}{5(5n^2-2)} < \varepsilon$$

$$\frac{16}{5\varepsilon} < 5n^2 - 2$$

$$\frac{16}{25\varepsilon} + \frac{2}{5} < n^2$$

$$\sqrt{\frac{16}{25\varepsilon} + \frac{2}{5}} < n$$

Пусть $N = \left[\sqrt{\dfrac{16}{25\varepsilon} + \dfrac{2}{5}}\right] + 1$

При $\varepsilon = 0{,}01 \ \ N = \left[\sqrt{\dfrac{16}{25 \cdot 0{,}01} + \dfrac{2}{5}}\right] + 1 = 9 \Rightarrow$ все члены последовательности, начиная с 10-го, содержатся в интервале $\left(\dfrac{3}{5} - 0{,}01; \dfrac{3}{5} + 0{,}01\right)$.

Задания

1. Задайте последовательность аналитически и найдите пять первых членов этой последовательности:

а) каждому натуральному числу ставится в соответствие противоположное ему число;

б) каждому натуральному числу ставится в соответствие квадратный корень из этого числа;

в) каждому натуральному числу ставится в соответствие число -5;

г) каждому натуральному числу ставится в соответствие половина его квадрата.

2. По заданной формуле n-го члена вычислите пять первых членов последовательности (y_n):

а) $y_n = \frac{(-2)^n}{n^2+1}$; б) $y_n = 3\cos\frac{2\pi}{n}$.

3. Является ли последовательность $x_n = \frac{5}{n+3}$ ограниченной?

4. Является ли последовательность $x_n = 7^{n-5}$ убывающей или возрастающей?

5. Запишите окрестность точки a=-3 радиуса r=0,5 в виде интервала.

6. Окрестностью какой точки и какого радиуса является интервал (2,1;2,3)?

7. Вычислите предел последовательности:

а) $x_n = \frac{2n+1}{3n-2}$; б) $x_n = \frac{(1-n)(n^2+1)+n^2}{n^2+2n}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение последовательности.
2. Какая последовательность называется убывающей?
3. Приведите пример последовательности, ограниченной снизу.
4. Объясните, что такое окрестность числа.
5. Какая последовательность называется сходящейся?

Практическая работа №17
«Решение задач на вычисление пределов. Непрерывность функции»

Цель: формирование навыков вычисления пределов функций и исследования функций на непрерывность

Теоретические сведения

Число b называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к a, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что при всех $x \neq a$, удовлетворяющих неравенству $|x-a| < \delta$, будет выполнено неравенство $|f(x)-b| < \varepsilon$.

Вычисление предела функции $f(x)$ следует начинать с подстановки предельного значения аргумента $x = a$, (a - число или один из символов ∞, $+\infty$, $-\infty$) в выражение, определяющее эту функцию. При этом приходится сталкиваться с двумя существенно различными типами примеров.

I. Если основная элементарная функция определена в предельной точке $x = a$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f\left(\lim\limits_{x\to a} x\right) = f(a)$.

Имеют место основные теоремы, на которых основано вычисление пределов элементарных функций.

1. Если C - постоянная величина, то $\lim\limits_{x\to a} C = C$.

2. Если C - постоянная величина, то $\lim\limits_{x\to a} Cf(x) = C\cdot\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

3. Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$, то:

$$\lim_{x\to a}\left(f_1(x)\pm f_2(x)\right) = \lim_{x\to a} f_1(x)\pm\lim_{x\to a} f_2(x);$$

$$\lim_{x\to a}\left(f_1(x)\cdot f_2(x)\right) = \lim_{x\to a} f_1(x)\cdot\lim_{x\to a} f_2(x);$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)},\quad \lim_{x\to a} f_2(x)\neq 0.$$

II. Функция $f(x)$ в предельной точке $x = a$ не определена. Тогда вычисление предела требует в каждом случае индивидуального подхода. В одних случаях (наиболее простых) вопрос сводится к применению теорем о свойствах бесконечно малых и бесконечно больших функций и связи между ними.

Более сложными случаями нахождения предела являются такие, когда подстановка предельного значения аргумента в выражение для $f(x)$ приводит к одной из *неопределенностей*:

$$\infty-\infty,\ 0\cdot\infty,\ \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 1^{\infty},\ 0^{0},\ \infty^{0}.$$

Тогда вычисление предела заключается в раскрытии полученных неопределенностей.

Здесь могут оказаться полезными:

первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, ($x$ - радианная мера угла);

второй замечательный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$.

Кроме того, при раскрытии неопределенностей используют следующие приемы:

1. сокращение дроби на критический множитель $(x-a)^{\alpha}$ при $x\to a$;
2. избавление от иррациональности в числителе или знаменателе дроби;
3. разложение многочленов на линейные или квадратичные множители при $x\to a$, $(a\neq\infty)$.

Примеры

Задание 1. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}$.

Решение:

Как решить вышерассмотренный пример? Нужно просто подставить единицу в функцию, стоящую под знаком предела:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1} = \frac{2\cdot 1^2-3\cdot 1-5}{1+1} = \frac{-6}{2} = -3$$

Итак, первое правило**: Когда дан любой предел, сначала просто пытаемся подставить число в функцию.**

Задание 2. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-2x-3)$.

Решение:

Грубо говоря, согласно нашему первому правилу, мы вместо «икса» подставляем в функцию бесконечность и получаем ответ.

$$\lim_{x\to\infty}(x^2-2x-3) = \infty.$$

Пределы с неопределенностью вида $\frac{\infty}{\infty}$ и метод их решения

Задание 3. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}$.

Решение:

Сначала мы смотрим на числитель и находим x в старшей степени: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}$. Старшая степень в числителе равна двум.

Теперь смотрим на знаменатель и тоже находим x в старшей степени: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}$. Старшая степень знаменателя равна двум.

Затем мы выбираем самую старшую степень числителя и знаменателя: в данном примере они совпадают и равны двойке.

Итак, метод решения следующий: **для того, чтобы раскрыть неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ необходимо разделить числитель и знаменатель на x в старшей степени.**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$

Разделим числитель и знаменатель на x^2

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\frac{1+x+3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}^{\to 0}-\frac{5}{x^2}^{\to 0}}{\frac{1}{x^2}^{\to 0}+\frac{1}{x}^{\to 0}+3}=\frac{2}{3}$$

Что принципиально важно в оформлении решения?

Во-первых, указываем неопределенность, если она есть.

Во-вторых, желательно прервать решение для промежуточных объяснений. Я обычно использую знак (*), он не несет никакого математического смысла, а обозначает, что решение прервано для промежуточного объяснения.

В-третьих, в пределе желательно помечать, что и куда стремится. Когда работа оформляется от руки, удобнее это сделать так:

$$\frac{2-\frac{3}{x}^{\to 0}-\frac{5}{x^2}^{\to 0}}{\frac{1}{x^2}^{\to 0}+\frac{1}{x}^{\to 0}+3}$$

Для пометок лучше использовать простой карандаш.

Задание 4. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}$.

Решение:

Снова в числителе и знаменателе находим x в старшей степени: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}$. Максимальная степень в числителе: 3. Максимальная степень в знаменателе: 4.

Выбираем **наибольшее** значение, в данном случае четверку.

Согласно нашему алгоритму, для раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ делим числитель и знаменатель на x^4.

Полное оформление задания может выглядеть так:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$

Разделим числитель и знаменатель на x^4.

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{x^4}}{\frac{5x^4+6x^2-3x-4}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7}{x}^{\to 0}+\frac{15}{x^2}^{\to 0}+\frac{9}{x^3}^{\to 0}+\frac{1}{x^4}^{\to 0}}{5+\frac{6}{x^2}^{\to 0}-\frac{3}{x^3}^{\to 0}-\frac{4}{x^4}^{\to 0}}=$$

$$=\frac{0+0+0+0}{5+0-0-0}=\frac{0}{5}=0$$

Задание 5. Найти предел $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}$

Решение:

Максимальная степень «икса» в числителе: 2. Максимальная степень «икса» в знаменателе: 1 (x можно записать как x^1).

Для раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ необходимо разделить числитель и знаменатель на x^2. Чистовой вариант решения может выглядеть так:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$

Разделим числитель и знаменатель на x^2.

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\frac{x+1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}^{\to 0}-\frac{5}{x^2}^{\to 0}}{\frac{1}{x}^{\to 0}+\frac{1}{x^2}^{\to 0}}=\frac{2}{0}=\infty$$

Под записью $\frac{2}{0}$ подразумевается не деление на ноль (делить на ноль нельзя), а деление на бесконечно малое число.

Таким образом, при раскрытии неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ у нас может получиться *конечное число*, ноль или бесконечность.

Пределы с неопределенностью вида $\frac{0}{0}$ и метод их решения

Группа следующих пределов чем-то похожа на только что рассмотренные пределы: в числителе и знаменателе находятся многочлены, но «икс» стремится уже не к бесконечности, а к *конечному числу*.

Задание 6. Решить предел $\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}$

Решение:

Сначала попробуем подставить -1 в дробь: $\frac{2(-1)^2-3\cdot(-1)-5}{-1+1}=\frac{0}{0}$

В данном случае получена так называемая неопределенность $\frac{0}{0}$.

Общее правило: если в числителе и знаменателе находятся многочлены, и имеется неопределенности вида $\frac{0}{0}$, то для ее раскрытия **нужно разложить числитель и знаменатель на множители**.

Для этого чаще всего нужно решить квадратное уравнение и (или) использовать формулы сокращенного умножения. Итак, решаем наш предел $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{0}{0}=(*)$

Разложим числитель и знаменатель на множители. Для того чтобы разложить числитель на множители, нужно решить квадратное уравнение: $2x^2-3x-5=0$

Сначала находим дискриминант: $D=(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-5)=9+40=49$ и квадратный корень из него: $\sqrt{D}=\sqrt{49}=7$.

Если корень не извлекается нацело (получается дробное число с запятой), очень вероятно, что дискриминант вычислен неверно либо в задании опечатка.

Далее находим корни:

$$x_1=\frac{-(-3)-7}{2\cdot 2}=\frac{3-7}{4}=\frac{-4}{4}=-1$$

$$x_2=\frac{-(-3)+7}{2\cdot 2}=\frac{3+7}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

Таким образом:

$$2x^2-3x-5=2(x-(-1))\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)=2(x+1)\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)=(x+1)\cdot(2x-5)$$

Всё. Числитель на множители разложен.

Знаменатель. Знаменатель $x+1$ уже является простейшим множителем, и упростить его никак нельзя.

$$(*)=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\cdot(2x-5)}{x+1}=(*)$$

Очевидно, что можно сократить на (x+1) :

$$(*)=\lim_{x\to -1}(2x-5)=(*)$$

Теперь и подставляем -1 в выражение, которое осталось под знаком предела:

$$=2\cdot(-1)-5=-2-5=-7$$

Естественно, в контрольной работе, на зачете, экзамене так подробно решение никогда не расписывают. В чистовом варианте оформление должно выглядеть примерно так:

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{0}{0}=(*)$$

Разложим числитель на множители: $2x^2-3x-5=0$

$$D=(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-5)=9+40=49$$

$$\sqrt{D}=\sqrt{49}=7$$

$$x_1=\frac{-(-3)-7}{2\cdot 2}=\frac{3-7}{4}=\frac{-4}{4}=-1$$

$$x_2=\frac{-(-3)+7}{2\cdot 2}=\frac{3+7}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

$$2x^2-3x-5=2(x+1)\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)=(x+1)\cdot(2x-5)$$

$$(*)=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\cdot(2x-5)}{x+1}=\lim_{x\to -1}(2x-5)=-2-5=-7$$

Задание 7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 2}\frac{8-2x^2}{x^2+4x-12}$

Решение:

Сначала «чистовой» вариант решения

$$\lim_{x\to 2}\frac{8-2x^2}{x^2+4x-12}=\frac{0}{0}=(*)$$

Разложим числитель и знаменатель на множители.

Числитель: $8-2x^2=2(4-x^2)=2(2-x)(2+x)$

Знаменатель: $x^2+4x-12=0$

$D=16+48=64$

$\sqrt{D}=8$

$x_1=\frac{-4-8}{2}=-6$, $x_2=\frac{-4+8}{2}=2$

$x^2+4x-12=(x+6)(x-2)$

$$(*)=\lim_{x\to 2}\frac{2(2-x)(2+x)}{(x+6)(x-2)}=2\lim_{x\to 2}\frac{(2-x)(2+x)}{(x+6)(x-2)}=2\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)(2+x)}{(x+6)(x-2)}=$$

$$=-2\lim_{x\to 2}\frac{(2+x)}{(x+6)}=-2\cdot\frac{4}{8}=-1$$

Задание 8. Найти предел $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15}$

Решение:

Начинаем решать.

Сначала пробуем подставить 3 в выражение под знаком предела. Данное действие обычно проводится мысленно или на черновике.

$$\frac{\sqrt{3+6}-\sqrt{10\cdot 3-21}}{5\cdot 3-15}=\frac{\sqrt{9}-\sqrt{9}}{15-15}=\frac{0}{0}$$

Получена неопределенность вида $\frac{0}{0}$, которую нужно устранять. $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15}=\frac{0}{0}=(*)$

Когда в числителе (знаменателе) находится разность корней (или корень минус какое-нибудь число), то для раскрытия неопределенности $\frac{0}{0}$ используют **метод умножения числителя и знаменателя на сопряженное выражение.**

Вспоминаем нашу нетленную формулу разности квадратов: $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

И смотрим на наш предел: $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15}$.

Что можно сказать? $(a-b)$ у нас в числителе уже есть. Теперь для применения формулы осталось организовать $(a+b)$ (которое в и называется **сопряженным выражением**).

Умножаем числитель на сопряженное выражение:

$$\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21})\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}{5x-15}$$

Обратите внимание, что под корнями при этой операции мы ничего не трогаем.

Хорошо, $(a+b)$ мы организовали, но выражение-то под знаком предела изменилось! А для того, чтобы оно не менялось, нужно его разделить на то же самое, т.е. на $(a+b)$:

$$(*)=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21})\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=(*)$$

То есть, **мы умножили числитель и знаменатель на сопряженное выражение**. В известной степени, это искусственный прием.

Умножили. Теперь самое время применить вверху формулу $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$:

$$(*)=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6})^2-(\sqrt{10x-21})^2}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x+6-(10x-21)}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x+6-10x+21}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=(*)$$

Неопределенность $\frac{0}{0}$ не пропала (попробуйте подставить тройку), да и корни тоже не исчезли. Но с **суммой** корней всё значительно проще, ее можно превратить в постоянное число. Как это сделать? Да просто подставить тройку под корни:

$$(*)=\lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(\sqrt{3+6}+\sqrt{10\cdot 3-21})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(\sqrt{9}+\sqrt{9})}=\lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(3+3)}=$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{5x-15}=(*)$$

Число, как уже отмечалось ранее, лучше вынести за значок предела.

Теперь осталось разложить числитель и знаменатель на множители, собственно, это следовало сделать раньше.

$$(*)=\frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\frac{-9(x-3)}{5(x-3)}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\frac{-9}{5}=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{-9}{5}\right)=-\frac{3}{10}$$

Задание 9. Найти предел $\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{\sqrt{x+6}-2}$

Решение:

Сначала попробуйте решить его самостоятельно.

Окончательное решение примера может выглядеть так:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{\sqrt{x+6}-2}=\frac{0}{0}=(*)$$

Разложим числитель на множители: $x^2+x-2=0$

$D=1+8=9$

$\sqrt{D}=3$

$x_1=\frac{-1-3}{2}=-2$

$x_2=\frac{-1+3}{2}=1$

$x^2+x-2=(x+2)(x-1)$

Умножим числитель и знаменатель на сопряженное выражение

$$(*) = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x-1)(\sqrt{x+6}+2)}{(\sqrt{x+6}-2)(\sqrt{x+6}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x-1)(\sqrt{x+6}^{\to 2}+2)}{x+6-4} = 4\lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x-1)}{x+2} =$$

$$= 4\lim_{x\to -2}(x-1) = 4\cdot(-3) = -12$$

Замечательные пределы

Задание 10. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{3x}$

Решение:

Если мы замечаем в пределе синус, то это нас сразу должно наталкивать на мысль о возможности применения первого замечательного предела.

Сначала пробуем подставить 0 в выражение под знак предела (делаем это мысленно или на черновике):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{3x} = \frac{0}{0}$$

Итак, а нас есть неопределенность вида $\frac{0}{0}$, ее *обязательно указываем* в оформлении решения. Выражение под знаком предела у нас похоже на первый замечательный предел, но это не совсем он, под синусом находится $7x$, а в знаменателе $3x$.

В подобных случаях первый замечательный предел нам нужно организовать самостоятельно, используя искусственный прием. Ход рассуждений может быть таким: «под синусом у нас $7x$, значит, в знаменателе нам тоже нужно получить $7x$». А делается это очень просто:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{3x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{3\cdot\frac{1}{7}\cdot 7x}$$

То есть, знаменатель искусственно умножается в данном случае на 7 и делится на ту же семерку. Теперь запись у нас приняла знакомые очертания. Когда задание оформляется от руки, то первый замечательный предел желательно пометить простым карандашом:

(1-й замечательный предел)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{3x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{\overset{\to 1}{\sin 7x}}{3\cdot\frac{1}{7}\cdot 7x}$$

Что произошло? По сути, обведенное выражение у нас превратилось в единицу и исчезло в произведении:

(1-й замечательный предел)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{3x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{\overset{\to 1}{\sin 7x}}{3\cdot\frac{1}{7}\cdot 7x} = \frac{1}{\frac{3}{7}}$$

Теперь только осталось избавиться от трехэтажности дроби:

(1-й замечательный предел)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{3x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{\overset{\to 1}{\sin 7x}}{3\cdot\frac{1}{7}\cdot 7x} = \frac{1}{\frac{3}{7}} = \frac{7}{3}$$

Готово. Окончательный ответ: $\frac{7}{3}$

Задание 11. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}$

Решение:

Опять мы видим в пределе дробь и синус. Пробуем подставить в числитель и знаменатель ноль:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{0}{0}$$

Действительно, у нас неопределенность $\frac{0}{0}$ и, значит, нужно попытаться организовать первый замечательный предел. Степени мы представим в виде произведения (множителей):

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{5x\cdot x}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}$$

Далее, по уже знакомой схеме организовываем первые замечательные пределы. Под синусами у нас $\frac{x}{2}$, значит, в числителе тоже нужно получить $\frac{x}{2}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{5x\cdot x}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot 2\cdot 2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}$$

Аналогично предыдущему примеру, обводим карандашом замечательные пределы (здесь их два), и указываем, что они стремятся к единице:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{5x\cdot x}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot 2\cdot 2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}}{\underbrace{\sin\frac{x}{2}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\sin\frac{x}{2}}_{\to 1}}$$

Собственно, ответ готов:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{5x\cdot x}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot 2\cdot 2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}}{\underbrace{\sin\frac{x}{2}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\sin\frac{x}{2}}_{\to 1}}=5\cdot 2\cdot 2=20$$

Задание 12. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg2x}{2x^2}$

Решение:

Подставляем ноль в выражение под знаком передела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{2x^2}=\frac{0}{0}$$

Получена неопределенность $\frac{0}{0}$, которую нужно раскрывать. Если в пределе есть тангенс, то почти всегда его превращают в синус и косинус по известной тригонометрической формуле $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

В данном случае:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{2x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x^2\cdot\cos 2x}$$

Косинус нуля равен единице, и от него легко избавиться (не забываем пометить, что он стремится к единице):

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{2x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x^2\cdot(\cos 2x)^{\to 1}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x^2}$$

Таким образом, если в пределе косинус является множителем, то его, условно говоря, нужно превратить в единицу, которая исчезает в произведении.

Дальше по накатанной схеме, организуем первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{2x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x^2\cdot(\cos 2x)^{\to 1}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x\cdot x} =$$

Здесь все вышло проще, без всяких домножений и делений. Первый замечательный предел тоже превращается в единицу и исчезает в произведении:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{2x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x^2\cdot(\cos 2x)^{\to 1}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x\cdot x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \frac{1}{0} = \infty$$

В итоге получена бесконечность, бывает и такое.

Задание 13. Найти предел $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x}$

Решение:

Пробуем подставить ноль в числитель и знаменатель:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x} = \frac{0}{0}$$

Получена неопределенность $\frac{0}{0}$ (косинус нуля, как мы помним, равен единице)

Используем тригонометрическую формулу $1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$.

Возьмите на заметку! Пределы с применением этой формулы почему-то встречаются очень часто.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{5x}$$

Постоянные множители вынесем за значок предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{5x} = \frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x}$$

Организуем первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{5x}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x}=$$
$$=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot\sin 2x}{\frac{1}{2}\cdot 2x}$$

Здесь у нас только один замечательный предел, который превращается в единицу и исчезает в произведении:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{5x}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x}=$$
$$=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot\sin 2x}{\frac{1}{2}\cdot 2x}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\frac{1}{2}}$$

Избавимся от трехэтажности:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{5x}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x}=$$
$$=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot\sin 2x}{\frac{1}{2}\cdot 2x}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{5}\cdot 2\lim_{x\to 0}(\sin 2x)$$

Предел фактически решен, указываем, что оставшийся синус стремится к нулю:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{5x}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x}=$$
$$=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot\sin 2x}{\frac{1}{2}\cdot 2x}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{5}\cdot 2\lim_{x\to 0}(\sin 2x)^{\to 0}=\frac{4}{5}\cdot 0=0$$

Второй замечательный предел

В теории математического анализа доказано, что:

$$\lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}=e$$

Данный факт носит название **второго замечательного предела**.

Справка: $e=2{,}718281828...$ *– это иррациональное число.*

В качестве параметра α может выступать не только переменная x, но и сложная функция. **Важно лишь, чтобы она стремилась к бесконечности**.

Задание 14. Найти предел $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}$

Решение:

Когда выражение под знаком предела находится в степени – это первый признак того, что нужно попытаться применить второй замечательный предел.

Нетрудно заметить, что при $x\to\infty$ основание степени $\left(1+\frac{1}{3x}\right)\to 1$, а показатель – $4x\to\infty$, то есть имеется, неопределенность вида 1^{∞}:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}=1^{\infty}$$

Данная неопределенность как раз и раскрывается с помощью второго замечательного предела. Но, как часто бывает, второй замечательный предел не лежит на блюдечке с голубой каемочкой, и его нужно искусственно организовать. Рассуждать можно следующим образом: в данном примере параметр $\alpha = 3x$, значит, в показателе нам тоже нужно организовать $3x$. Для этого возводим основание в степень $3x$, и, чтобы выражение не изменилось – возводим в степень $\frac{1}{3x}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x} = 1^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right)^{\frac{1}{3x}\cdot 4x}$$

Когда задание оформляется от руки, карандашом помечаем:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x} = 1^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right)^{\frac{1}{3x}\cdot 4x}$$

e (2-ой замечательный предел)

Практически всё готово, страшная степень превратилась в симпатичную букву e:
При этом сам значок предела перемещаем в показатель.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x} = 1^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right)^{\frac{1}{3x}\cdot 4x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{3x}} = e^{\frac{4}{3}}$$

e (2-ой замечательный предел)

Далее, отметки карандашом я не делаю, принцип оформления, думаю, понятен.

Задание 15. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}$

Решение:

Внимание! Предел подобного типа встречается очень часто, пожалуйста, очень внимательно изучите данный пример.

Пробуем подставить бесконечно большое число в выражение, стоящее под знаком предела:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$$

В результате получена неопределенность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$. Но второй замечательный предел применим к неопределенности вида 1^{∞}. Что делать? Нужно преобразовать основание степени. Рассуждаем так: в знаменателе у нас $x+1$, значит, в числителе тоже нужно организовать $x+1$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{2x+3}$$

Теперь можно почленно разделить числитель на знаменатель:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{2x+3} = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x+1}\right)^{2x+3}$$

Вроде бы основание стало напоминать $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)$, но у нас знак «минус» да и тройка какая-то вместо единицы. Поможет следующее ухищрение, делаем дробь трехэтажной:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x+1}\right)^{2x+3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-3}\right)}\right)^{2x+3}=1^{\infty}$$

Таким образом, основание приняло вид $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)$, и, более того, появилась нужная нам неопределенность 1^{∞}. Организуем второй замечательный предел $\lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}$.

Легко заметить, что в данном примере $\alpha=\frac{x+1}{-3}$. Снова исполняем наш искусственный прием: возводим основание степени в $\frac{x+1}{-3}$, и, чтобы выражение не изменилось – возводим в обратную дробь $\frac{-3}{x+1}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x+1}\right)^{2x+3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-3}\right)}\right)^{2x+3}=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-3}\right)}\right)^{\frac{x+1}{-3}}\right)^{\frac{-3}{x+1}\cdot(2x+3)}$$

Наконец-то долгожданное $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}$ устроено, с чистой совестью превращаем его в букву e:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x+1}\right)^{2x+3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-3}\right)}\right)^{2x+3}=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-3}\right)}\right)^{\frac{x+1}{-3}}\right)^{\frac{-3}{x+1}(2x+3)}=e^{-3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x+1}}=e^{\frac{\infty}{\infty}}$$

Но на этом мучения не закончены, в показателе у нас появилась неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, раскрывать такую неопределенность мы научились. Делим числитель и знаменатель на x:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x+1}\right)^{2x+3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-3}\right)}\right)^{2x+3}=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-3}\right)}\right)^{\frac{x+1}{-3}}\right)^{\frac{-3}{x+1}\cdot(2x+3)}=e^{-3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x+1}}=e^{\frac{\infty}{\infty}}=$$

$$=e^{-3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2x+3}{x}}{\frac{x+1}{x}}}=e^{-3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}}}=e^{-3\cdot 2}=e^{-6}$$

Рассмотрим модификацию второго замечательного предела. Напомню, что второй замечательный предел выглядит следующим образом: $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}=e$. Однако на практике время от времени можно встретить его «перевёртыш», который в общем виде записывается так:

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$$

Задание 16. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}(1+tgx)^{\frac{1}{2x}}$

Решение:

Сначала (мысленно или на черновике) пробуем подставить ноль (бесконечно малое число) в выражение, стоящее под знаком предела:

$$(1+tg0)^{\frac{1}{2\cdot 0}}=(1+0)^{\frac{1}{0}}=1^{\infty}$$

В результате получена знакомая неопределенность 1^{∞}. Очевидно, что в данном примере $\alpha=tgx$. С помощью знакомого искусственного приема организуем в показателе степени конструкцию $\frac{1}{\alpha}$:

$$\lim_{x\to 0}(1+tgx)^{\frac{1}{2x}}=1^{\infty}=\lim_{x\to 0}\left((1+tgx)^{\frac{1}{tgx}}\right)^{tgx\cdot\frac{1}{2x}}$$

Выражение $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ со спокойной душой превращаем в букву e:

$$\lim_{x\to 0}(1+tgx)^{\frac{1}{2x}}=1^{\infty}=\lim_{x\to 0}\left((1+tgx)^{\frac{1}{tgx}}\right)^{tgx\cdot\frac{1}{2x}}=e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}}=e^{\frac{0}{0}}$$

Еще не всё, в показателе у нас появилась неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Раскладываем тангенс на синус и косинус (ничего не напоминает?):

$$\lim_{x\to 0}(1+tgx)^{\frac{1}{2x}} = 1^{\infty} = \lim_{x\to 0}\left((1+tgx)^{\frac{1}{tgx}}\right)^{tgx\cdot\frac{1}{2x}} = e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}} = e^{\frac{0}{0}} =$$

$$= e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cdot\cos x}}$$

Косинус нуля стремится к единице (не забываем помечать карандашом), поэтому он просто пропадает в произведении:

$$\lim_{x\to 0}(1+tgx)^{\frac{1}{2x}} = 1^{\infty} = \lim_{x\to 0}\left((1+tgx)^{\frac{1}{tgx}}\right)^{tgx\cdot\frac{1}{2x}} = e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}} = e^{\frac{0}{0}} =$$

$$= e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cdot(\cos x)^{-1}}} = e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = e^{\frac{1}{2}}$$

Непрерывность функции. Классификация точек разрыва

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x = a$, если бесконечно малому приращению аргумента в этой точке соответствует бесконечно малое приращение функции, то есть $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$.

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x = a$, если существует конечный предел функции в этой точке, который равен значению функции в точке $x = a$, то есть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Примером непрерывной функции может служить любая элементарная функция, которая непрерывна в каждой точке своей области определения.

Точка $x = a$ называется *точкой разрыва* функции $y = f(x)$, если эта функции определена в некоторой окрестности точки $x = a$, но в самой точке $x = a$ не удовлетворяет условию непрерывности.

Точки разрыва функции делятся два типа. К *точкам разрыва I рода* относятся такие точки, в которых существуют конечные односторонние пределы: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ (левый предел) и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ (правый предел). К *точкам разрыва II рода* относятся те точки, в которых хотя бы один из односторонних пределов не существует или бесконечен.

Заметим, что точки разрыва I рода подразделяются в свою очередь на *точки устранимого разрыва* (когда $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x) \neq f(a)$) и на *точки скачка* функции (когда $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$); в последнем случае разность $f(a+0) - f(a-0)$ называется скачком функции $f(x)$ в точке $x = a$.

Примеры

Задание 17. Вычислите односторонние пределы: 1) $\lim\limits_{x\to 2\pm 0}\frac{4}{(x-2)^3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1\pm 0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$.

Решение: 1) Пусть $x < 2$. Тогда при $x \to 2-0$ функция $x-2$, а, следовательно, и $(x-2)^3$ есть отрицательная бесконечно малая, поэтому функция $4\cdot\frac{1}{(x-2)^3}$ - отрицательная бесконечно большая, то есть $\lim\limits_{x\to 2-0}\frac{4}{(x-2)^3} = -\infty$.

При $x \to 2+0$ функция $x-2$, а, следовательно, и $(x-2)^3$ - положительная бесконечно большая функция, то есть $\lim\limits_{x\to 2+0}\frac{4}{(x-2)^3} = +\infty$.

2) Пусть $x<1$. Тогда при $x\to 1-0$ имеем: $x-1$ - отрицательная бесконечно малая функция; следовательно, $\frac{1}{x-1}\to -\infty$ и $2^{\frac{1}{x-1}}\to 0$. Отсюда $\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=1$.

Если $x>1$, то при $x\to 1+0$ получим: $x-1$ - положительная бесконечно малая функция; следовательно, $\frac{1}{x-1}\to +\infty$ и $2^{\frac{1}{x-1}}\to +\infty$, тогда $\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}\to 0$. Имеем, $\lim\limits_{x\to 1+0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=0$.

Задание 18. Даны функции: 1) $y=\frac{1}{x+3}$; 2) $y=\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$. Найти точки разрыва и исследовать их характер.

Решение: 1) Функция $y=\frac{1}{x+3}$ определена при всех значениях x, кроме $x=-3$. Так как эта функция является элементарной, то она непрерывна в каждой точке своей области определения, состоящей из двух промежутков $(-\infty,-3)$ и $(-3,+\infty)$.

Следовательно, единственной точкой разрыва является точка $x=-3$ (функция определена в окрестности этой точки, в самой же точке нарушается условие непрерывности – функция в ней не определена). Для исследования характера разрыва найдем левый и правый пределы этой функции при стремлении аргумента к точке разрыва $x=-3$: $\lim\limits_{x\to -3+0}\frac{1}{x+3}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to -3-0}\frac{1}{x+3}=-\infty$.

Следовательно, при $x=-3$ функция $y=\frac{1}{x+3}$ имеет бесконечный разрыв; $x=-3$ есть точка II рода.

2) Рассуждая аналогично, получим, что точкой разрыва заданной функции является $x=0$. Найдем односторонние пределы этой функции в точке $x=0$: $\lim\limits_{x\to +0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}=0$, $\lim\limits_{x\to -0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}=1$.

Таким образом, левый и правый пределы исследуемой функции при $x=0$ конечны, но не равны между собой. Поэтому $x=0$ точка I рода, причем точка скачка функции.

Задания

1. Вычислите пределы функций

1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}$; 2) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{12}{x^3+8}\right)$; 3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{5}{4x+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-2x^2+3}{3x^3-5}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{5x+1}$;

7) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{4x^2-7x-2}{5x^2-11x+2}$; 8) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$; 9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x}\right)^x$;

10) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+2x-15}{x^2-9}$; 11) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{2z}{\sqrt{4+z}-\sqrt{4-z}}$; 12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{4x}\right)^x$;

13) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-x^2+2}{x^3-x+1}$; 14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$; 15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^x$;

16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{-x}$.

2. Вычислите пределы функций по вариантам

№	***a***	***b***	***c***	***d***	***e***
1	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2+7x+10}{x^2-x-6}$, где $x_0=-1$, $x_0=-2$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+1}{x^2+5x-2}$	$\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x^2-64}{\sqrt{x+1}-3}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,4x}{\sin 3x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+5}\right)^{7x}$
2	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2+10x+25}{x^2+3x-10}$, где $x_0=3$, $x_0=-5$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x^2+x-4}{3x^2+5x+8}$	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{4x+9}-1}{5x+10}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x\cos 6x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+5}{4x-3}\right)^{2x}$
3	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2-7x+2}{2x^2-5x+2}$, где $x_0=-1$, $x_0=3$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2-2x+4}{x^2+x-5}$	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{3x}-x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{tg\,9x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x-3}{7x-2}\right)^{5x}$
4	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2-5x-3}{-15-4x+3x^2}$, где $x_0=1$, $x_0=3$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x+4}{x^2+2x-3}$	$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{3x+18}-3}{x^2-9}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{8x+1}{8x-3}\right)^{4x}$
5	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2+x-1}{5x^2+4x-1}$, где $x_0=3$, $x_0=-1$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x^2+4x+7}{5x^2-3x+1}$	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{1-\sqrt{x}}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x\cos 2x}{\sin 3x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-4}{2x-1}\right)^{4x}$
6	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{4x^2+7x+3}{2x^2+x-1}$, где $x_0=1$, $x_0=-1$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+2x-4}{3x^2-x+8}$	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{x^2-16}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos 8x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{9x+1}{9x+2}\right)^{-2x}$
7	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$, где $x_0=3$, $x_0=1$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2+x-3}{5x^2+4x-1}$	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{1-4x}-3}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 9x}{tg\,4x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-2}{4x+1}\right)^{-3x}$
8	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2-9x+9}{x^2-5x+6}$, где $x_0=-2$, $x_0=3$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+6x-3}{2x^2-5x+1}$	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{4-x^2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos 5x}{\sin 8x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+2}{5x-1}\right)^{4x}$
9	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2-5x-3}{x^2-4x+3}$, где $x_0=-1$, $x_0=3$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2+x+8}{6x^2-x+16}$	$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{\sqrt{2x-1}-3}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,7x}{\sin 10x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+6}\right)^{-x}$
10	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-3x+2}{14-x-3x^2}$, где $x_0=1$, $x_0=2$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x-5}{8x^2-x+4}$	$\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,3x}{\sin 8x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x-3}{6x-4}\right)^{-x}$

3. Вычислить пределы, подставив вместо букв заданные в таблице значения параметров

1. $\lim\limits_{x\to a}(x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc).$	2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^3-bx^2+cx-100}{cx^3+ax^2-bx+10}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^3+bx^2+cx+1}{ax^2+bx+c}$	4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2-bx-c}{cx^3+b}$
5. $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{x^2+(a-b)x-ab}{x^2-(b+c)x+bc}$	6. $\lim\limits_{x\to \pi/a}\dfrac{1}{\cos ax}$
7. $\lim\limits_{x\to \pi/b}\dfrac{1}{\lvert\sin bx\rvert}$	8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin cx}{cx}$
9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{bx}{\sin x}$	10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{x}$
11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgax}{x}$	12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{cx}$
13. $\lim\limits_{x\to\infty}(14^x\cdot\sin\dfrac{c}{14^x})$	14. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{bx}$
15. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{x+a}$	16. $\lim\limits_{x\to 0}(1+c\cdot x)^{\frac{1}{x}}$
17. $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{a}{bx})^{cx}$	18. $\lim\limits_{x\to\infty}(x\cdot\ln(1+\dfrac{1}{x}))$
19. Исследовать функцию $y=ax^2-bx-c$ на непрерывность в точке $x_0=a$	20.Найти вертикальные асимптоты функции $y=\dfrac{ax}{x^2-(b+c)x+bc}$
21.Найти горизонтальную асимптоту функции $y=\dfrac{ax-b}{ax^2-bx+c}$	22. Найти наклонную асимптоту $y=\dfrac{ax^3+bx^2}{x^2-cx}$

Значения параметров

№	параметры *abc*			№	параметры *abc*			№	параметры *abc*			№	параметры *abc*			№	параметры *a*	*b*	*c*
1	1	-15	1	**7**	4	-12	7	**13**	7	-9	13	**19**	-10	6	4	**25**	-3	6	10
2	-1	15	2	**8**	-4	12	8	**14**	-7	9	14	**20**	10	-6	5	**26**	3	-6	11
3	2	-14	3	**9**	5	-11	9	**15**	8	-8	15	**21**	-1	5	6	**27**	-4	7	12
4	-2	14	4	**10**	-5	11	10	**16**	-8	8	1	**22**	1	-5	7	**28**	4	-7	13
5	3	-13	5	**11**	6	-10	11	**17**	9	-7	2	**23**	-2	4	8	**29**	-5	9	14
6	-3	13	6	**12**	-6	10	12	**18**	-9	7	3	**24**	2	-4	9	**30**	5	-9	15

4. Вычислить односторонние пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 1\pm 0}\dfrac{x+2}{x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 5\pm 0}\dfrac{3-x}{(x-5)^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}\pm 0} tg2x$;

4) $\lim\limits_{x\to 3\pi\pm 0} ctg\frac{x}{3}$; 5) $\lim\limits_{x\to\pm 0}\left(6^x+5\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to 2-0}\frac{\lg(2-x)}{2-x}$.

5. Для данных функций найти точки разрыва и исследовать их характер:

1) $y=\frac{1}{2-x}$; 2) $y=\frac{1}{(x-5)^2}$; 3) $y=-\frac{2}{x^2-1}$;

4) $y=\frac{1}{4x-x^2-3}$; 5) $y=\frac{3}{2^x-1}$; 6) $y=\frac{\sin x}{x}$.

6. Исследовать на непрерывность функции:

1) $y=-5x$; 2) $v=2t^2$; 3) $y=x^2+2$;

4) $s=t^2-t$; 5) $y=x^3$; 6) $y=-x^3-1$;

7) $y=2x^3$; 8) $y=x^3-5$ в точке $x=1$.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение предела функции в точке.
2. Что такое неопределенность?
3. Какие способы раскрытия неопределенностей вы знаете?
4. Сформулируйте основные теоремы вычисления пределов.
5. Запишите формулы, соответствующие первому и второму замечательным пределам.
6. Дайте определение непрерывной функции.
7. Что называется точкой разрыва?
8. На какие два типа делятся точки разрыва? Дайте определение.
9. Какие пределы называются односторонними?
10. Какая точка называется точкой устранимого разрыва?
11. Какая точка называется точкой скачка? Что называется скачком?

Практическая работа №18
«Вычисление производных с использованием правил дифференцирования»

Цель: формирование навыков вычисления производных функций по правилам дифференцирования.

Теоретические сведения

Производной функции *f(x)* в точке $x = x_0$ называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Производные основных элементарных функций

1) $C' = 0$; 9) $(\sin x)' = \cos x$

2) $(x^m)' = mx^{m-1}$; 10) $(\cos x)' = -\sin x$

3) $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 11) $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

4) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ 12) $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

5) $\left(e^x\right)' = e^x$

6) $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$

7) $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$

8) $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

13) $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14) $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15) $\left(arctgx\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

16) $\left(arcctgx\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Основные правила дифференцирования

Обозначим *f(x) = u, g(x) = v* – функции, дифференцируемые в точке *x*.

1) $(\boldsymbol{c})' = 0$; 2) $(\boldsymbol{x})' = 1$;

3) $(\boldsymbol{u} \pm \boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}' \pm \boldsymbol{v}'$;

4) $(\boldsymbol{cu})' = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{u}'$;

5) $\left(\dfrac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}}\right)' = \dfrac{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}'}{\boldsymbol{v}^2}$; $(\boldsymbol{v} \neq 0)$

6) $\left(\dfrac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{v}}\right)' = -\dfrac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{v}^2} \cdot \boldsymbol{v}'$; $(\boldsymbol{v} \neq 0)$

7) $(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}'\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}'$.

Производная сложной функции

Теорема. *Пусть y = f(x); u = g(x), причем область значений функции u входит в область определения функции f.*

Тогда $y' = f'(u) \cdot u'$

Если $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$, $\boldsymbol{u} = \varphi(\boldsymbol{x})$, т.е. $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\varphi(\boldsymbol{x}))$ - сложная функция, то $\boldsymbol{y}'_x = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{u}'$.

На основании определения производной и правил дифференцирования составлена таблица производных сложных функций.

1 $\left(\boldsymbol{u}^\alpha\right)' = \alpha \cdot \boldsymbol{u}^{\alpha-1} \cdot \boldsymbol{u}'$ $(\alpha \in \boldsymbol{R})$,

2 $\left(\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{u}}\right)' = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{u}} \cdot \ln \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{u}'$,

3 $\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{u}}\right)' = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{u}'$,

4 $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$,

5 $\left(\ln \boldsymbol{u}\right)' = \dfrac{1}{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{u}'$,

6 $\left(\sin \boldsymbol{u}\right)' = \cos \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}'$,

7 $\left(\cos \boldsymbol{u}\right)' = -\sin \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}'$,

8 $\left(\boldsymbol{tgu}\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 \boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{u}'$,

9 $\left(\boldsymbol{ctgu}\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 \boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{u}'$,

10 $\left(\arcsin \boldsymbol{u}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{u}^2}} \cdot \boldsymbol{u}'$,

11 $\left(\arccos \boldsymbol{u}\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{u}^2}} \cdot \boldsymbol{u}'$,

12 $\left(\boldsymbol{arctg}\, \boldsymbol{u}\right)' = \dfrac{1}{1+\boldsymbol{u}^2} \cdot \boldsymbol{u}'$,

13 $\left(\boldsymbol{arcctg}\, \boldsymbol{u}\right)' = -\dfrac{1}{1+\boldsymbol{u}^2} \cdot \boldsymbol{u}'$.

Примеры

Задание 1. Найти производную функции:

$$\boldsymbol{y} = \frac{1}{\sqrt[3]{\boldsymbol{x}}} + \frac{1}{6\boldsymbol{x}^6} - \frac{1}{2\sqrt{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{x}^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{6}\boldsymbol{x}^{-6} - \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{-\frac{1}{2}}.$$

Решение:

$$y' = \left(x^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{6}x^{-6} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \right)' = \left(x^{-\frac{1}{3}} \right)' + \frac{1}{6}\left(x^{-6}\right)' - \frac{1}{2}\left(x^{-\frac{1}{2}} \right)' = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} + \frac{1}{6}(-6)x^{-7} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}} - \frac{1}{x^7} + \frac{1}{4\sqrt{x^3}}.$$

Ответ: $y' = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}} - \frac{1}{x^7} + \frac{1}{4\sqrt{x^3}}$.

Задание 2. Найти производную функции $y = (x^3 - 3x^2 + 1)^3$.

Решение:

Используем формулу $(u(x)^n)' = n \times u(x)^{n-1} \times (u(x))'$

$y' = 3(x^3 - 3x^2 + 1)^2 \times (x^3 - 3x^2 + 1)' = 3(x^3 - 3x^2 + 1)^2 \times (3x^2 - 6x)$

Задание 3. Найти производную функции $y = \cos(4 - 2x)$.

Решение:

Используем формулу $(\cos(u(x)))' = -\sin(u(x)) \times (u(x))'$

$y' = -\sin(4 - 2x) \times (4 - 2x)' = -\sin(4 - 2x) \times (0 - 2) = 2\sin(4 - 2x)$

Задание 4. Найти производную функции $y(x) = 3^{\cos x}$.

Решение:

Поскольку $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$, то по правилу производной сложной функции получаем

$$y'(x) = \left(3^{\cos x}\right)' = 3^{\cos x} \cdot \left(\cos x\right)' = -\sin x \cdot 3^{\cos x}.$$

Задание 5. Найти производную функции $y = \sqrt{2 - 3x^2}$.

Решение:

Используем формулу $\left(\sqrt{u(x)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u(x)}} \times (u(x))'$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{2 - 3x^2}} \times (2 - 3x^2)' = \frac{1}{2\sqrt{2 - 3x^2}} \times (0 - 6x) = \frac{-6x}{2\sqrt{2 - 3x^2}} = \frac{-3x}{\sqrt{2 - 3x^2}}$$

Задание 6. Найти производную функции $g(x) = \mathrm{tg}\sqrt{1 - x}$.

Решение:

Здесь мы имеем дело с композицией трех функций. Производная тангенса равна $\left(\mathrm{tg}\, x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Тогда

$$g'(x) = \left(\mathrm{tg}\sqrt{1 - x}\right)' = \frac{1}{\cos^2\sqrt{1 - x}} \cdot \left(\sqrt{1 - x}\right)' = \frac{1}{\cos^2\sqrt{1 - x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - x}} \cdot \left(1 - x\right)' =$$

$$= \frac{1}{\cos^2\sqrt{1 - x}} \cdot \frac{(-1)}{2\sqrt{1 - x}} = -\frac{1}{2\sqrt{1 - x}\cos^2\sqrt{1 - x}}.$$

Задания

1. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные функций:

   1) а) $5x^4 - 3{,}5x^2 + x + 6$; б) $\left(\frac{8}{x} + x^2\right)\sqrt{x}$; в) $\frac{1 + x}{4 - x^2}$.

   2) а) $\frac{5}{x} - x^3 + \sqrt{x} + 3$; б) $\left(x^2 - 3x - 2\right)\sqrt{x}$; в) $\frac{1 - x^2}{1 - x^3}$.

3) а) $0{,}7x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 0{,}75x^2 + \frac{1}{10}$; б) $(x+2)\sin x$; в) $\frac{x^2}{x+3}$.

4) а) $2x^{10} + 0{,}05x^4 - \frac{1}{7}x + 0{,}3$; б) $(4 - x^2)\cos x$; в) $\frac{\sin x}{2 - x^3}$.

5) а) $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + 5$; б) $x^2 \cdot 5^x$; в) $\frac{x^3 - 3x}{1 - 2x}$.

6) а) $2^x + \lg x - 3$; б) $(2 - \sqrt{x}) \cdot tgx$; в) $\frac{2x^2}{3 - x}$.

7) а) $\frac{3}{x^3} - \sqrt[5]{x} + \frac{5}{\sqrt[3]{x}}$; б) $x \cdot \lg x$; в) $\frac{x}{4 - x}$.

8) а) $-\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 7x + 18$; б) $\sqrt{x} \cdot \ln x$; в) $\frac{e^x}{x}$.

2. Вычислите производные сложных функций:

1) а) $f(x) = \sqrt[4]{1 + x^2}$; б) $f(x) = 5^{2x}$; в) $f(x) = \sin 3x$; г) $f(x) = \frac{\ln x}{e^x + e^{-x}}$; д) $f(x) = 2tg^3 4x$

2) а) $f(x) = \frac{1}{(2x-1)^2}$; б) $f(x) = e^{-3x}$; в) $f(x) = \cos 5x$;
г) $f(x) = (3x+4) \cdot \log_5(x + 1 + x^2)$; д) $f(x) = 4ctg^3 2x$.

3) а) $f(x) = (3 - x)^4$; б) $f(x) = 2\log_3 2x$; в) $f(x) = 3tg\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$; г) $f(x) = (x^2 + 4) \cdot e^{-x^2}$; д) $f(x) = 2\sin^3 4x$.

4) а) $f(x) = \sqrt[5]{x + \sqrt{x}}$; б) $f(x) = \lg(3x)$; в) $f(x) = 3\cos\frac{x}{3}$; г) $f(x) = x \cdot 2^{3x + x^2}$;
д) $f(x) = \log_3^2(2x+1)$.

5) а) $f(x) = (3 - 2x^3)^5$; б) $f(x) = 0{,}3^{3x^2 - 7x + 2}$; в) $f(x) = \cos(x^2 + 4x + 12)$;
г) $f(x) = (3x + 5x^2 + x^3) \cdot 4^{x^2}$; д) $f(x) = 3\sin^2 5x$.

6) а) $f(x) = \frac{1}{(x^2 + 5)^3}$; б) $f(x) = e^{-4x}$; в) $f(x) = tgx^3$; г) $f(x) = \frac{5x}{\sin 6x}$;
д) $f(x) = (\ln(2x+1))^6$.

7) а) $f(x) = x^2 \cdot e^{x^2 + 3x}$; б) $f(x) = tg^2 2x$; в) $f(x) = \sin(5 - x)$; г) $f(x) = 2^{5x - x^2}$;
д) $f(x) = (3x^3 + x^7)^5$;

8) а) $f(x) = \sqrt{2x - 1}$; б) $f(x) = e^{-x^3}$; в) $f(x) = tg\sqrt{x}$; г) $f(x) = \frac{\sin 5x}{x}$;
д) $f(x) = \sqrt[3]{\ln(1 - x)}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение производной функции.

2. Перечислите правила нахождения производной функции.
3. Какие функции называются дифференцируемыми?
4. Какая функция называется сложной?
5. Как найти производную сложной функции?

Практическая работа №19
«Производные высших порядков. Обыкновенные дифференциальные уравнения»

Цель: формирование навыков вычисления производных и дифференциалов высших порядков

Теоретические сведения

Производная второго порядка (вторая производная) от функции $y = f(x)$ есть производная от ее первой производной: $y'' = (f'(x))'$.

Производная третьего порядка (третья производная) от функции $y = f(x)$ есть производная от ее второй производной: $y''' = (f''(x))'$.

Производная n – го порядка (*n – я* производная) от функции $y = f(x)$ есть производная от ее *(n – 1) – ой* производной: $y^{(n)} = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$.

Дифференциал второго порядка (второй дифференциал) функции $y = f(x)$ есть дифференциал от ее первого дифференциала: $d^2y = d(dy)$.

Дифференциал третьего порядка (третий дифференциал) функции $y = f(x)$ есть дифференциал от ее второго дифференциала: $d^3y = d\left(d^2y\right)$.

Дифференциал n – го порядка (*n – ый* дифференциал) функции $y = f(x)$ есть дифференциал от ее *(n – 1) – ого* дифференциала: $d^ny = d\left(d^{n-1}y\right)$.

Примеры

Задание 1: Найти y', y'', y''', …, если $y = x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x^2 - 0{,}5x + 7$.

Решение: $y' = 5x^4 + 8x^3 - 9x^2 - 2x - 0{,}5$,

$y'' = 20x^3 + 24x^2 - 18x - 2$,

$y''' = 60x^2 + 48x - 18$,

$y^{IV} = 120x + 48$, $y^{V} = 120$, $y^{VI} = y^{VII} = \ldots = 0$.

Задание 2: Найти дифференциалы первого, второго и третьего порядков функции $y = (2x-3)^3$.

Решение: $dy = 3\cdot(2x-3)^2\cdot 2dx = 6\cdot(2x-3)^2\,dx$,

$d^2y = 12\cdot(2x-3)\cdot 2dx^2 = 24\cdot(2x-3)dx^2$,

$d^3y = 24\cdot 2dx^3 = 48dx^3$.

Задания

1. Найти производные второго порядка:

1) $y = 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x$;
2) $y = (2x+5)^3$;
3) $y = \dfrac{1}{x-1}$;
4) $y = -\dfrac{22}{x+5}$;
5) $y = \cos^2 x$;
6) $y = e^{-x^2}$;
7) $y = 5^{\sqrt{x}}$;
8) $y = x\sin 2x$;
9) $y = e^x\cos x$.

2. Дана функция $f(x) = \sin 3x$. Найти $f''\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$, $f''(0)$, $f''\left(\dfrac{\pi}{18}\right)$.

3. Найти производные третьего порядка:

1) $y = \dfrac{x}{6 \cdot (x+1)}$; 2) $y = \dfrac{1}{2}\ln^2 x$; 3) $y = (2x+3)^3 \cdot \sqrt{2x+3}$.

4. Найти дифференциалы первого и второго порядков функции $v = e^{2t}$.
5. Найти дифференциалы первого, второго и третьего порядков функций:

1) $y = 2x^3 + 5x^2$; 2) $y = e^{t^3}$;

3) $y = x \cdot (\ln x - 1)$.

6. Показать, что функция $y = 4e^{-2x} - 5e^x$ удовлетворяет уравнению $y''' - 3y' + 2y = 0$.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется производной второго порядка?
2. Что называется производной *n – го* порядка?
3. Что называется дифференциалом функции?
4. Что называется дифференциалом второго порядка?
5. Что называется дифференциалом *n – го* порядка? По какой формуле он вычисляется?

Практическая работа №20
«Дифференциальные уравнения первого порядка»

Цель: формирование навыков решения дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными; однородных дифференциальных уравнений первого порядка и линейных дифференциальных уравнений первого порядка

Теоретические сведения

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее между собой независимую переменную x, искомую функцию y и ее производные или дифференциалы.

Символически дифференциальное уравнение записывается так:

$$F(x, y, y') = 0,\ F(x, y, y'') = 0,\ F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0.$$

Дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*, если искомая функция зависит от одного независимого переменного.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной (или дифференциала), входящей в данное уравнение.

Решением (или *интегралом*) дифференциального уравнения называется такая функция, которая обращает это уравнение в тождество.

Общим решением (или *общим интегралом*) дифференциального уравнения называется такое решение, в которое входит столько независимых произвольных постоянных, каков порядок уравнения. Так, общее решение дифференциального уравнения первого порядка содержит одну произвольную постоянную.

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, полученное из общего при различных числовых значениях произвольных постоянных. Значения произвольных постоянных находятся при определенных начальных значениях аргумента и функции.

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, в которое входят производные (или дифференциалы) не выше первого порядка.

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\cdot\varphi(y).$$

Для решения этого уравнения нужно сначала разделить переменные:

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx,$$

а затем проинтегрировать обе части полученного равенства:

$$\int\frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx.$$

Уравнение вида $\frac{dy}{dx} + f(x)y + \varphi(x) = 0$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ - функции от x, называется *линейным дифференциальным уравнением первого порядка*. В частности $f(x)$ и $\varphi(x)$ могут быть постоянными величинами.

Это уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки $y = uz$, где u и z - новые функции от x.

Примеры

Задание 1: Найдите общее решение уравнения $x\cdot(1+y^2)dx = ydy$.

Решение: Разделив переменные, имеем $xdx = \frac{ydy}{1+y^2}$. Интегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int xdx = \int\frac{ydy}{1+y^2}; \qquad \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}\ln(1+y^2) + \frac{1}{2}\ln C.$$

Так как произвольная постоянная C может принимать любые числовые значения, то для удобства дальнейших преобразований вместо C мы написали $\frac{1}{2}\ln C$. Потенцируя последнее равенство, получим $x^2 = \ln[C\cdot(1+y^2)]$.

Это и есть общее решение данного уравнения.

Задание 2: Найти частное решение уравнения $s\cdot tg\,t\,dt + ds = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $s = 4$ при $t = \frac{\pi}{3}$.

Решение: Разделив переменные, имеем $tg\,t\,dt + \frac{ds}{s} = 0$. Проинтегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int tg\,t\,dt + \int\frac{ds}{s} = \ln C; \qquad -\ln\cos t + \ln s = \ln C,$$

или

$$\ln s = \ln C + \ln\cos t, \qquad s = C\cos t.$$

Это общее решение данного уравнения. Для нахождения значения произвольной постоянной C подставим значения $t = \frac{\pi}{3}$ и $s = 4$ в выражение для общего решения: $4 = C\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$, или $4 = \frac{C}{2}$, откуда $C = 8$.

Следовательно, искомое частное решение, удовлетворяющее указанным начальным условиям, имеет вид $s = 8\cos t$.

Задание 3: Найдите общее решение уравнения $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$.

Решение: Это линейное уравнение: здесь $f(x)=-\dfrac{2}{x+1}$, $\varphi(x)=-(x+1)^3$. Положим $y=uz$ и продифференцируем это равенство по x:

$$\frac{dy}{dx}=u\frac{dz}{dx}+z\frac{du}{dz}.$$

Подставив теперь выражения для y и $\dfrac{dy}{dx}$ в данное уравнение, получим

$$u\frac{dz}{dx}+z\frac{du}{dz}-\frac{2uz}{x+1}=(x+1)^3,$$

или

$$u\frac{dz}{dx}+z\left(\frac{du}{dz}-\frac{2u}{x+1}\right)=(x+1)^3. \qquad (*)$$

Так как одну из вспомогательных функций u или z можно выбрать произвольно, то в качестве u возьмем одно из частных решений уравнения $\dfrac{du}{dx}-\dfrac{2u}{x+1}=0$. Разделив в этом уравнении переменные и проинтегрируя, имеем $\dfrac{du}{dx}-\dfrac{2u}{x+1}=0$, $\displaystyle\int\frac{du}{u}=2\int\frac{dx}{x+1}$;

$\ln u=2\ln(x+1)$, $u=(x+1)^2$ (произвольную постоянную C принимаем равной нулю, так как находим одно из частных решений).

Подставим теперь выражение для u в уравнение $(*)$; тогда получим уравнение $(x+1)^2\cdot\dfrac{dz}{dx}=(x+1)^3$, или $\dfrac{dz}{dx}=x+1$.

Отсюда находим $\int dz=\int(x+1)dx$; $z=\dfrac{(x+1)^2}{2}+C$.

Зная u и z, теперь получим общее решение данного уравнения:

$$y=uz=(x+1)^2\cdot\left[\frac{(x+1)^2}{2}+C\right]=\frac{(x+1)^4}{2}+C\cdot(x+1)^2.$$

Задания

1. Найдите общее решение уравнений:

   1) $x^2dx=3y^2dy$; 2) $\sqrt{x}dy=\sqrt{y}dx$; 3) $\dfrac{dy}{\sqrt{x}}=\dfrac{3dx}{\sqrt{y}}$;

   4) $(1+y)dx=(x-1)dy$; 5) $xydx=(1+x^2)dy$;

   6) $y^2dx+(x-2)dy=0$; 7) $x^2dy-(2xy+3y)dx=0$;

   8) $(x^2-yx^2)dy+(y^2+xy^2)dx=0$.

2. Найдите частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

   1) $ydy=xdx$; $y=4$ при $x=-2$;

   2) $xdy=ydx$; $y=6$ при $x=2$;

   3) $ds=(3t^2-2t)dt$; $s=4$ при $t=2$;

   4) $\dfrac{dy}{x^2}=\dfrac{dx}{y^2}$; $y=2$ при $x=0$;

   5) $\dfrac{dy}{x-1}=\dfrac{dx}{y-2}$; $y=4$ при $x=-2$;

6) $(1+y)dx=(1-x)dy$; $y=3$ при $x=-2$;

7) $(1+x)ydx+(1-y)xdy=0$; $y=1$ при $x=1$.

3. Найдите общие решения уравнения:

1) $\frac{dy}{dx}-2y-3=0$;

2) $\frac{dy}{dx}=y+1$;

3) $x\frac{dy}{dx}-x^2+2y=0$;

4) $\frac{dy}{dx}+xy=x$;

5) $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^2$;

6) $\frac{dy}{dx}-y\,ctgx=\sin x$.

Задания для проверочной работы

1. Найдите решение уравнения с разделяющимися переменными $y'=Y(y)X(x)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0)=y_0$.

Вариант 1

1. $4xydx-(x^2+1)dy=0$; *при x=1 и y=4*

2. $y^2dx-e^xdy=0$; *при x=0 и y=1*

3. $(1-y)dx+(1+x)dy=0$; *при y(1)=3*

4. $y\sin xdx+\cos xdy=0$; *при* $x=\frac{\pi}{3}$ $y=\frac{1}{2}$

Вариант 2

1. $\frac{dy}{x-1}-\frac{dx}{y-2}=0$; *при x=0 и y=4*

2. $\frac{dy}{dx}-2y-3=0$; *y(3)=0*

3. $\sqrt{x}dy-\sqrt{y}dx=0$; *при y=0 и x=0*

4. $y'=(2y+1)ctgx$; *при* $y=(\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$

Вариант 3

1. $\frac{dy}{x^2}-\frac{dx}{y^2}=0$; *при x=0 и y=2*

2. $(1+y)dx-(1-x)dy=0$; *y(-2)=3*

3. $ytgxdx+dy=0$; *при y=4 и* $x=(\frac{\pi}{3})$

4. $x^2y'\sqrt{x}=y$; *при* $y(4)=1$

2. Решите дифференциальные уравнения 2-го порядка. В уравнениях, где заданы начальные условия, найдите частное решение уравнения.

Вариант 1

1. $\frac{d^2s}{dt^2}=18t+2$, если $s(0)=4$, $s'(0)=5$

2. $y'' - 4y' + 5y = 0$

3. $y'' - 10y' + 25y = 0$, если $y(0) = 2$, $y'(0) = 8$

4. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0$

Вариант 2

1. $\frac{d^2y}{dx^2} = x^2$, если $y(0) = 0$, $y'(0) = 12$

2. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 20y = 0$, если $y(0) = \frac{9}{5}$, $y'(0) = 0$

3. $y'' + 6y' + 9y = 0$

4. $y'' + 2y' + 10y = 0$

Вариант 3

1. $\frac{d^2y}{dx^2} = 12x$, если $y(0) = 2$, $y'(0) = 20$

2. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0$

3. $y'' + 12y' + 36y = 0$

4. $y'' - 6y' + 13y = 0$, если $y(0) = 1$, $y'(0) = 5$

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение дифференциального уравнения.
2. Что такое порядок уравнения?
3. Назовите виды простейших дифференциальных уравнений.
4. Что называется решением дифференциального уравнения?
5. Какое решение дифференциального уравнения называется общим?
6. Какое решение дифференциального уравнения называется частным?
7. Какие дифференциальные уравнения называются уравнениями первого порядка?
8. Какие дифференциальные уравнения называются уравнениями с разделяющимися переменными?
9. Дайте определение однородного ДУ с постоянными коэффициентами.
10. Чем отличается общее решение ДУ от частного.

Практическая работа №21
«Решение задач на вычисление первообразной и неопределённого интеграла»

Цель: формирование навыков нахождения первообразных и неопределенных интегралов функций.

Теоретические сведения

Совокупность всех первообразных $F(x) + C$ функции *f*(*x*) называется *неопределенным интегралом* от функции *f*(*x*) и обозначается символом $\int f(x)dx$, т.е. $\int f(x)dx = F(x) + C$.

В этом равенстве *f*(*x*) называется *подынтегральной функцией*, а *f*(*x*)*dx* – *подынтегральным выражением.*

Проинтегрировать функцию $f(x)$ - значит найти ее неопределенный интеграл. Непосредственное интегрирование основано на прямом использовании основных свойств неопределенного интеграла и таблицы простейших интегралов.

Свойства неопределенных интегралов

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;
2. $\int f'(x)dx = f(x) + C$;
3. $\int k \cdot f(x)dx = k\int f(x)dx$;
4. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$;
5. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

Таблица простейших интегралов

1. $\int 0du = C$,	6. $\int \cos u du = \sin u + C$,
2. $\int u^a du = \frac{u^{a+1}}{a+1} + C$, $a \neq 1$,	7. $\int \operatorname{tg} u du = -\ln\lvert\cos u\rvert + C$,
2а. $\int du = u + C$,	8. $\int \operatorname{ctg} u du = \ln\lvert\sin u\rvert + C$,
2б. $\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$,	9. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$,
2в. $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$,	10. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$,
3. $\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$,	11. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$,
4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$,	12. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C$,
4а. $\int e^u du = e^u + C$,	13. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{u-a}{u+a}\right\rvert + C$,
5. $\int \sin u\, du = -\cos u + C$,	14. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right\rvert + C$.

Метод непосредственного интегрирования

Непосредственное интегрирование основано на прямом использовании таблицы интегралов. Возможны случаи:

1) данный интеграл находится непосредственно по соответствующему табличному интегралу;

2) данный интеграл после применения свойств 3 и 4 приводится к одному или нескольким табличным интегралам;

3) данный интеграл после элементарных тождественных преобразований над подынтегральной функцией (по членное деление, приведение к виду степенной функции, использование известных тождеств) и применения свойств 3 и 4 приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

Примеры

Задание 1. Найти $\int\left(2x^3-\frac{4}{x}+\frac{1}{3}e^x\right)dx$.

Решение:

Последовательно применим к данному интегралу свойства 3 и 4, а затем воспользуемся таблицей основных интегралов:

$$\int\left(2x^3-\frac{4}{x}+\frac{1}{3}e^x\right)dx=\int 2x^3dx-\int\frac{4dx}{x}+\int\frac{1}{3}e^xdx=$$

$$=2\int x^3dx-4\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{3}\int e^xdx=2\cdot\frac{x^{3+1}}{3+1}-4\ln|x|+\frac{1}{3}e^x+C=$$

$$=2\cdot\frac{x^4}{4}-4\ln|x|+\frac{1}{3}e^x+C=\frac{x^4}{2}-4\ln|x|+\frac{1}{3}e^x+C.$$

Задание 2. Найти $\int\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{6}{\sqrt{x}}-3^x\right)dx.$

Решение:

$$\int\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{6}{\sqrt{x}}-3^x\right)dx=\int x^{\frac{2}{3}}dx+6\int x^{-\frac{1}{2}}dx-\int 3^x\,dx=$$

$$=\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}+6\cdot\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}-\frac{3^x}{\ln 3}+C=\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}+6\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-\frac{3^x}{\ln 3}+C=$$

$$=\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+12\sqrt{x}-\frac{3^x}{\ln 3}+C=\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+12\sqrt{x}-\frac{3^x}{\ln 3}+C.$$

Интегрирование методом подстановки

Вычислить заданный интеграл непосредственным интегрированием удается далеко не всегда, а иногда это связано с большими трудностями. Одним из наиболее эффективных приемов является метод подстановки или замены переменной интегрирования. Сущность этого метода заключается в том, что путем введения новой переменной интегрирования удается свести заданный интеграл к новому интегралу, который сравнительно легко берется непосредственно.

В основе интегрирования *методом подстановки* (или *замены переменной*) лежит свойство инвариантности формул интегрирования, которое заключается в следующем: если $\int f(x)dx=F(x)+C$, то $\int f(u)du=F(u)+C$, где $u(x)$ - произвольная дифференцируемая функция от x.

Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью подстановок следующих двух типов:

1) $x=\varphi(t)$ - где t - новая переменная, а $\varphi(t)$ - непрерывно дифференцируемая функция. В этом случае формула замены переменной такова:

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (1)$$

Функцию $\varphi(t)$ стараются выбирать таким образом, чтобы правая часть формулы (1) приобрела более удобный для интегрирования вид;

2) $t=\psi(x)$, где t - новая переменная. В этом случае формула замены переменной имеет вид

$$\int f(\psi(x))\psi'(x)dx = \int f(t)dt \qquad (2)$$

Примеры

Задание 3. Найти $\int (3x-5)^7 dx$.

Решение:

$$\int (3x-5)^7 dx = \begin{bmatrix} t = 3x-5;\ 3x = t+5 \\ x = \frac{t}{3} + \frac{5}{3} \\ dx = \left(\frac{t}{3} + \frac{5}{3}\right)' dt = \frac{1}{3} dt \end{bmatrix} = \int t^7 \frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int t^7 dt =$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{t^8}{8} + C = \frac{1}{24}t^8 + C = \frac{1}{24}(3x-5)^8 + C.$$

Задание 4. Найти $\int \sin(2-8x)dx$

Решение:

$$\int \sin(2-8x)dx = \begin{bmatrix} 2-8x = t, -8x = t-2 \\ x = \frac{t-2}{-8} = -\frac{1}{8}t + \frac{2}{8} \\ dx = \left(-\frac{1}{8}t + \frac{2}{8}\right)' = -\frac{1}{8}dt \end{bmatrix} = \int \sin t \times \left(-\frac{1}{8}\right) dt$$

$$= -\frac{1}{8}\int \sin t dt = \frac{1}{8}\cos t = \frac{1}{8}\cos(2-8x) + C$$

Задание 5. Найти $\int \frac{dx}{2\sqrt{4+3x}}$

Решение:

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{4+3x}} = \begin{bmatrix} 4+3x = t \qquad 3x = t-4 \\ x = \frac{t-4}{3} = \frac{t}{3} - \frac{4}{3} = \frac{1}{3}t - \frac{4}{3} \\ dx = \left(\frac{1}{3}t - \frac{4}{3}\right)' = \frac{1}{3}dt \end{bmatrix} = \int \frac{\frac{1}{3}dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{3}\sqrt{t}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{4+3x} + C$$

Метод интегрирования по частям

Интегрированием по частям называется нахождение интеграла по формуле

$$\int udv = uv - \int vdu, \qquad (3)$$

где u и v - непрерывно дифференцируемые функции от x. С помощью формулы (3) отыскание интеграла $\int udv$ сводится к нахождению другого интеграла $\int vdu$, ее применение целесообразно в тех случаях, когда последний интеграл либо проще исходного, либо ему подобен.

При этом в качестве u берется функция, которая при дифференцировании упрощается, а в качестве dv - та часть подынтегрального выражения, интеграл от которой известен или может быть найден.

Так, при нахождении интегралов вида

$$\int P(x)e^{ax}dx, \quad \int P(x)\sin axdx, \quad \int P(x)\cos axdx$$

за u следует принять многочлен $P(x)$, а за dv - соответственно выражения $e^{ax}dx$, $\sin axdx$, $\cos axdx$; при отыскании интегралов вида

$$\int P(x)\ln xdx, \quad \int P(x)\arcsin axdx, \quad \int P(x)\arccos axdx$$

за u принимаются соответственно функции $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, а за dv - выражение $P(x)dx$.

Примеры

Задание 6. Вычислить неопределенный интеграл, используя метод интегрирования по частям: $\int (5+4x)\cos 8x\,dx,$

Решение:

При вычислении первого интеграла воспользуемся формулой интегрирования по частям:

$$\int (5+4x)\cos 8x \quad dx = \begin{vmatrix} u = 5+4x & du = 4dx \\ dv = \cos 8xdx & v = \frac{1}{8}\sin 8x \end{vmatrix} = \frac{1}{8}(5+4x)\sin 8x - \frac{4}{8}\int \sin 8xdx =$$

$$= \frac{1}{8}(5+4x)\sin 8x + \frac{\cos 8x}{16} + C\cdot$$

Задание 7. Вычислить неопределенный интеграл, используя метод интегрирования по частям: $\int \ln(3x+2)\,dx\cdot$

Решение:

При вычислении второго интеграла также воспользуемся формулой интегрирования по частям. В результате получим

$$\int \ln(3x+2) \quad dx = \begin{vmatrix} u = \ln(3x+2) & du = \dfrac{3dx}{3x+2} \\ dv = dx & v = x \end{vmatrix} = x\ln(3x+2) - \int \frac{3x}{3x+2}dx =$$

$$= x\ln(3x+2) - \int\left(1 - \frac{2}{3x+2}\right)dx = x\ln(3x+2) - x + \frac{2}{3}\ln(3x+2) + C\cdot$$

Задания

Вычислить интегралы, используя указанные методы

№ варианта	*Непосредственное интегрирование*	*Метод подстановки*	*Метод интегрирования по частям*
1	$\int\left(2-3e^x+x\right)dx$	$\int \frac{2dx}{\sqrt{5x-2}}$	$\int x\ln x\,dx$
	$\int\left(5x^5-\cos x-1\right)dx$	$\int \cos 3x\,dx$	$\int (x+1)e^x\,dx$
	$\int\left(7x^6-\sin x+3\right)dx$	$\int (2-3x)^7\,dx$	$\int \arcsin x\,dx$
2	$\int\left(7-\frac{1}{\cos^2 x}-x^2\right)dx$	$\int \sin(3-2x)\,dx$	$\int x\sin x\,dx$
	$\int\left(x^4-\frac{1}{2x}-4\right)dx$	$\int (2-7x)^3\,dx$	$\int arctgx\,dx$
	$\int\left(3-\frac{1}{\sin^2 x}+2\right)dx$	$\int \cos(4x-1)\,dx$	$\int 3x\cdot\ln x\,dx$
3	$\int\left(3x^2-\frac{2}{1+x^2}+5\right)dx$	$\int (6x-1)^{10}\,dx$	$\int \frac{5}{7}x\cos x\,dx$
	$\int\left(2\cos x-5x^4+3\right)dx$	$\int \sqrt{x+4}\,dx$	$\int \frac{3}{2}xe^x\,dx$

	$\int\left(5e^x - x^3 - 4\right)dx$	$\int \sin 7x\, dx$	$\int 3x\sin 5x\, dx$
4	$\int\left(5x^4 - \frac{1}{3x} + 4\right)dx$	$\int \sqrt{1+e^x}\cdot e^x\, dx$	$\int \frac{1}{3}x\sin 5x\, dx$
	$\int\left(1+3\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}\right)dx$	$\int \sqrt{3-2x}\, dx$	$\int (x-1)\ln x\, dx$
	$\int\left(\sqrt{x}-2x+\sqrt{x^3}\right)dx$	$\int \sin(1-3x)\, dx$	$\int (x+3)e^{2x}\, dx$
5	$\int\left(\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x^2}+1\right)dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{4+x}}$	$\int x\sin 2x\, dx$
	$\int\left(x^5 - \frac{4}{x} + \cos x\right)dx$	$\int \frac{dx}{5-3x}$	$\int x\ln 4x\, dx$
	$\int\left(2\sin x + \frac{3}{x} - 1\right)dx$	$\int \cos(1-3x)$	$\int x\cos 3x\, dx$

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется первообразной?
2. Перечислите свойства первообразной функции.
3. Дайте определение неопределенного интеграла.
4. Какие свойства неопределенного интеграла вы знаете?
5. Перечислите основные формулы интегрирования.
6. Какие методы интегрирования вы знаете?
7. В чем заключается метод непосредственного интегрирования?
8. В чем заключается метод интегрирования подстановкой?
9. В чем заключается метод интегрирования по частям?

Практическая работа №22
«Решение задач на вычисление определённого интеграла. Применение формулы Лейбница для вычисления определённых интегралов»

Цель: формирование навыков вычисления определенного интеграла при помощи формулы Ньютона – Лейбница

Теоретические сведения

Функция, $f(x)$ интегрируемая на промежутке $[a;b]$, если при любых разбиениях $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ промежутка $[a;b]$, таких, что $\Delta x = \max\limits_{1\le k\le n}\Delta x_k \to 0$ при произвольном выборе точек ξ_k (где $x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$), сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$ при $n\to\infty$ стремится к пределу S.

Предел $S = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\Delta x$ называют *определенным интегралом* от функции $f(x)$ на промежутке $[a;b]$ и обозначают $\int\limits_a^b f(x)dx$, то есть $S = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\Delta x = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Число a называется *нижним пределом* интеграла, b - *верхним*. Промежуток $[a;b]$ называется *промежутком интегрирования*, x - *переменной интегрирования*.

Для вычисления определенного интеграла от функции $f(x)$ в том случае, когда можно найти соответствующий неопределенный интеграл $F(x)$, служит *формула Ньютона*

– *Лейбница*: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$. То есть *определенный интеграл равен разности значений первообразной при верхнем и нижнем пределах интегрирования.*

Свойства определенного интеграла

1. Определенный интеграл алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме определенных интегралов этих функций

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)$$

2. Постоянный множитель подынтегрального выражения можно выносить за знак определенного интеграла

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

3. При перестановке пределов интеграла знак интеграла меняется на противоположный,

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Примеры

Задание. Вычислить следующие определенные интегралы:

$$1)\ \int_0^1 xdx;\qquad 2)\ \int_2^3 x^2dx;\qquad 3)\ \int_{-1}^2 (x^2+2x+1)dx;\ 4)\int_1^2 \frac{x^2dx}{5+2x^3}$$

Решение:

1) $\int_0^1 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\cdot(1^2 - 0^2) = \frac{1}{2}$;

2) $\int_2^3 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_2^3 = \frac{1}{3}\cdot(3^3 - 2^3) = \frac{19}{3}$;

3) $\int_{-1}^2 (x^2+2x+1)dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + x\right]\Big|_{-1}^2 = \left(\frac{2^3}{3} + 2^2 + 2\right) -$

$$-\left(\frac{1}{3}\cdot(-1)^3 + (-1)^2 + (-1)\right) = \left(\frac{8}{3} + 4 + 2\right) - \left(-\frac{1}{3} + 1 - 1\right) = = \frac{8}{3} + 6 + \frac{1}{3} - 1 + 1 = \frac{9}{3} + 6 = 3 + 6 = 9.$$

4) Введем новую переменную и сделаем подстановку

$5+2x^3 = t$

$d(5+2x^3) = dt$

$6x^2\,dx = dt$ откуда $dx = \frac{dt}{6x^2}$

После подстановки получим:

$$\int_1^2 \frac{x^2}{5+2x^3}dx = \int_1^2 \frac{x^2\frac{dt}{6x^2}}{t} = \frac{1}{6}\int_1^2 \frac{dt}{t} = \frac{1}{6}\ln t\ \Big|_1^2 =$$

Вернемся к старой переменной:

$$= \frac{1}{6}\ln(5+2x^3)\ \Big|_1^2 = \frac{1}{6}\left(\ln(5+2\cdot 2^3) - \ln(5+2\cdot 1^3)\right) = \frac{1}{6}(\ln 21 - \ln 7) = \frac{1}{6}\ln\frac{21}{7} = \frac{1}{6}\ln 3$$

Задания

Вычислить определенные интегралы:

1) $\int_{2}^{3} x^3 dx$; 2) $\int_{1}^{16} \sqrt{x} dx$; 3) $\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{dx}{x^2}$;

4) $\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{1}{\sqrt{e}}} \frac{dx}{x}$; 5) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \sin 7x dx$ 6) $\int_{-1}^{1} (6x^2 - 2x - 5) dx$;

7) $\int_{1}^{e^2} \frac{2\sqrt{x} + 5 - 7x}{x} dx$; 8) $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x dx$;

9) $\int_{3}^{4} \frac{dx}{25 - x^2}$; 10) $\int_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$; 11) $\int_{1}^{4} \frac{dx}{x^2 - 2x + 10}$;

12) $\int_{0}^{2} \frac{x dx}{x^4 - 9}$; 13) $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} ctg 2x dx$; 14) $\int_{\frac{1}{3}}^{3} x e^{3x} dx$;

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называется интегральной суммой для функции на отрезке?
2. Дайте определение определенного интеграла.
3. Сформулируйте основные свойства определенного интеграла.
4. В чем заключается суть формулы Ньютона – Лейбница?

Практическая работа №23
«Решение задач на применение формул комбинаторики»

Цель: формирование навыков решения комбинаторных задач.

Теоретические сведения

Перестановки – это комбинации, составленные из всех *n* элементов данного множества и отличающиеся только порядком их расположения. Число всех возможных перестановок

$$P_n = n!$$

Размещения – комбинации из *m* элементов множества, содержащего *n* различных элементов, отличающиеся либо составом элементов, либо их порядком. Число всех возможных размещений

Размещения без повторений: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Сочетания – неупорядоченные наборы из *m* элементов множества, содержащего *n* различных элементов (то есть наборы, отличающиеся только составом элементов). Число сочетаний

Сочетания без повторений: $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

Примеры

Задание 1. В ящике 300 деталей. Известно, что 150 из них – 1-го сорта, 120 – 2-го, а остальные – 3-го сорта. Сколько существует способов извлечения из ящика, одной детали 1-го или 2-го сорта?

Решение:

Деталь 1-го сорта может быть извлечена $n_1 = 150$ способами, 2-го сорта – $n_1 = 120$ способами. По правилу суммы существует $n_1 + n_2 = 150 + 120 = 270$ способов извлечения одной детали 1-го или 2-го сорта.

Задание 2. Расписание одного дня состоит из 5 уроков. Определить число вариантов расписания при выборке из 11 дисциплин.

Решение:

Каждый вариант расписания представляет набор 5 дисциплин из 11, отличающийся от других вариантов, как составом дисциплин, так и порядком их следования (или и тем, и другим), т.е. является размещением без повторений из 11 элементов по 5. Число вариантов расписаний, т.е. число размещений из 11 по 5, находим по формуле $A_{11}^5 = \frac{11!}{(11-5)!} = \frac{11!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 = 55440$

Задание 3. В шахматном турнике участвуют 16 человек. Сколько партий должно быть сыграно в турнире, если между любыми двумя участниками должна быть сыграна одна партия?

Решение:

Каждая партия играется двумя участниками из 16 и отличается от других только составом пар участников, т.е. представляет собой сочетание из 16 элементов по 2. Их число находим по формуле $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, т.е. $C_{16}^2 = \frac{16!}{2!(16-2)!} = \frac{16!}{2!14!} = \frac{15 \cdot 16}{1 \cdot 2} = 120.$

Задание 4. Порядок выступления 7 участников конкурса определяется жребием. Сколько различных вариантов жеребьевки при этом возможно?

Решение:

Каждый вариант жеребьевки отличается только порядком участников конкурса, т.е. является перестановкой из 7 элементов. Их число равно $P_7 = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040.$

Задание 5. В конкурсе по 5 номинациям участвуют 10 кинофильмов. Сколько существует вариантов распределения призов, если по каждой номинации установлены: а) различные призы; б) одинаковые призы?

Решение:

а) Каждый из вариантов распределения призов п.с. комбинацию 5 фильмов из 10, отличающуюся от других комбинаций как составом фильмов, так и их порядком по номинациям (им и тем, и другим), причем одни и те же фильмы могут повторяться несколько раз (любой фильм может получить призы как по одной, так и по нескольким номинациям), т.е. представляет собой размещение с повторениями из 10 элементов по 5. $\overline{A}_{10}^5 = 10^5 = 100000.$

б) Если по каждой номинации установлены одинаковые призы, то порядок следования фильмов в комбинации 5 призеров значения не имеет, и число вариантов распределения призов п.с. число сочетаний с повторениями из 10 элементов по 5: $\overline{C}_{10}^5 = C_{10+5-1}^5 = C_{14}^5 = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 2002.$

Задание 6. Сколько существует семизначных чисел, состоящих из цифр 4, 5 и 6, в которых цифра 4 повторяется 3 раза, а цифры 5 и 6 по 2 раза.

Решение:

Каждое семизначное число отличается от другого порядком следования цифр (причем $k_1 = 3,\ k_2 = 2,\ k_3 = 2,$ а их сумма $k = 7$), т.е. является перестановкой с повторениями.

Задания

1. В ящике из 18 яблок находятся 4 красного цвета, остальные зелёного. Наугад берут 5 яблок. Сколько существует способов их взятия так, чтобы среди них оказалось два красного цвета?

2. Упростить: $\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$

$$\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{n!\cdot(\quad)}=\frac{n+1-1}{(\quad)!}=\frac{}{(\quad)!}$$

3. Сколькими способами можно разместить 3 иллюстрации на 10 страницах?

4. Сколькими способами можно из бригады 25 человек выбрать 4 человека для работы на определенном участке

Практическая работа №24
«Случайные события. Методы вычисления вероятностей»

Цель: формирование навыков решения вероятностных задач.

Теоретические сведения

Пусть некоторый эксперимент, или, согласно терминологии, используемой в теории вероятностей, *испытание,* может быть, по крайней мере теоретически, проведено в одних и тех же условиях неограниченное количество раз. Результатом каждого испытания является тот или иной его исход, называемый *событием.* Поскольку в теории вероятностей речь идет о таких испытаниях, исход которых не может быть однозначно предопределен, то соответствующие события называют *случайными событиями.* Например, случайным событием является выпадение цифры 2 при бросании игрального кубика, на гранях которого изображены цифры 1, 2, 3, 4, 5 и 6, наличие (как, впрочем, и отсутствие) некоторого препарата в конкретной, наугад выбранной аптеке в данный момент времени. Иными словами, случайное событие — это такое событие, которое в результате испытания может произойти, а может и не произойти. Случайные события принято обозначать большими буквами латинского алфавита: A, B, C, D и т.д.

Некоторые виды случайных событий

Событие называется *достоверным в данном испытании,* если в результате испытания оно обязательно происходит.

Например, достоверным является событие, состоящее в извлечении наугад упаковки аспирина из ящика, в котором находятся только упаковки аспирина.

Событие называется *невозможным в данном испытании,* если оно не может произойти в результате испытания.

Например, невозможным является событие, состоящее в извлечении наугад упаковки аспирина из ящика, в котором находятся только упаковки анальгина.

Строго говоря, как невозможное, так и достоверное события не являются случайными, поскольку их соответственно ненаступление и наступление предопределены условиями испытания.

Любое же из действительно случайных событий, т.е. событий, происходящих в результате испытания не наверняка, по мере возможности своего осуществления находится между событиями невозможными и достоверными.

Случайные события $A_1, A_2, ..., A_n$ называются *несовместными,* если осуществление любого из них в результате испытания исключает осуществление при этом других перечисленных событий.

Например, если событие A_1 состоит в выпадении цифры 1 при однократном бросании игрального кубика, событие A_2 — в выпадении цифры 2, и т.д., то события $A_1, A_2, ..., A_6$

являются несовместными, поскольку осуществление любого из них исключает наступление остальных событий в этом испытании.

Случайные события $A_1, A_2, ..., A_n$ называются *совместными,* если осуществление любого из них в результате испытания не исключает осуществления при этом других из перечисленных событий.

Например, если событие *A,* состоит в выпадении цифры / при однократном бросании игрального кубика, а событие A_2 — в выпадении нечетного числа очков, то эти два события — совместные, поскольку цифра / является нечетным числом.

Случайное событие *B* называется *благоприятствующим* для события *A,* если при наступлении события *B* обязательно наступает событие *A.*

В качестве примера рассмотрим корзину, в которой находятся 10 одинаковых по форме шаров (7 — белого цвета, 3 — красного) с указанными на них номерами от 1 до 10, причем все шары с четными номерами — белые. Из корзины наугад извлекают один шар. При этом событие *B,* состоящее в извлечении шара с четным номером, является благоприятствующим для события *A,* состоящего в извлечении белого шара, поскольку если в результате испытания извлечен шар с четным номером, то он обязательно белый.

Элементарными событиями (элементарными исходами) испытания называются все возможные результаты испытания, взаимно исключающие друг друга.

Например, несовместные события $A_1, A_2, ..., A_s$, состоящие в выпадении соответственно цифр *1, 2, 3* и т. д. при бросании игрального кубика, представляют собой элементарные события для данного испытания.

Совокупность случайных событий $A, A_2, ..., A_n$ называется *полной группой событий для данного испытания,* если в результате испытания обязательно происходит только одно из событий этой совокупности.

Например, случайные события, состоящие соответственно в извлечении упаковки анальгина (событие A_1), аспирина (событие A_2) и амидопирина (событие A_3), составляют полную группу случайных событий для испытания, в котором из коробки, содержащей только такие упаковки, извлекают наугад одну.

Случайные события $A_1, A_2, ... A_n$ называются *равновозможными для данного испытания,* если не существует никаких объективных причин, вследствие которых какие-либо из этих событий имели большие возможности для осуществления, чем другие.

Например, элементарные события $A_1, A_2, ..., A_6$, состоящие в выпадении соответственно цифр *1, 2, 3* и т. д. при бросании игрального кубика, являются равновозможными для данного испытания, поскольку нет никаких оснований с большей уверенностью ожидать выпадения какой-либо одной грани игрального кубика, чем любой другой.

Классическое определение вероятности случайного события

Под вероятностью случайного события в математике понимают меру возможности осуществления данного события в конкретных условиях эксперимента (испытания).

Рассмотрим некоторую конечную полную группу равновозможных элементарных событий (исходов) $B_1, B_2, ..., B_n$, т. е. совокупность всех единственно возможных, несовместных и вместе с тем равновозможных результатов некоторого испытания, причем пусть интересующее нас случайное событие *A* осуществляется тогда и только тогда, когда наступают некоторые из элементарных событий указанной полной группы. Пусть таких событий, благоприятствующих для события *A,* насчитывается *m* (естественно, $m<n$). Тогда вероятность события *A* определяют следующим образом:

Вероятностью P(A) случайного события *A* называется отношение количества *m* элементарных событий, благоприятствующих событию *A,* к общему количеству элементарных событий *n:*

$$P^*(A)=m/n$$

Поскольку в общем случае $0 < m < n$, то из этого определения, называемого *классическим определением вероятности случайного события,* следует, что вероятность произвольного случайного события принадлежит отрезку [0,1], т.е.

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Задание 1. Найти вероятность того, что при извлечении наугад одного шара из корзины, в которой находятся 2 белых, 3 зеленых и 5 красных шаров, извлеченный шар окажется зеленым.

Решение: Поскольку общее количество элементарных событий (исходов) для данного испытания образует полную группу из n=10 равновозможных событий (по общему количеству шаров в корзине), из которых только $m = 3$ элементарных события (по количеству зеленых шаров) являются благоприятствующими для интересующего нас события (обозначим это событие через *A),* получим:

P(A)=3/10

Задание 2. В урне находится 40 шаров: 10 черных и 30 белых. Найти вероятность того, что вынутый наугад один шар будет черным.

Решение: Число благоприятствующих случаев равно числу черных шаров в урне: $m = 10$. Общее число равновозможных событий (вынимание одного шара) равно полному числу шаров в урне: $n = 40$. Эти события несовместны, так как вынимается один и только один шар. По формуле (2.3) имеем:

$P(A) = 10/40 = 1/4$.

Задание 3. Найти вероятность выпадания четного числа при бросании игральной кости.

Решение: При бросании кости реализуются шесть равновозможных несовместных событий: появление одной цифры 1, 2, 3, 4, 5 или 6, т. е. $n = 6$. Благоприятствующими случаями являются выпадания одной из цифр 2, 4 или 6: $m = 3$. Искомая вероятность:

$P(A) = m/n – 3/6 = 1/2$.

События, которые при данных испытаниях не могут произойти, называются невозможными: их вероятность равна нулю.

Так, например, невозможно из урны с белыми и черными шарами вытащить красный шар, невозможно на игральной кости получить цифру 7.

***Событие, которое при данном испытании обязательно произойдет, называется достоверным, его вероятность равна* 1.**

Примером достоверного события является извлечение белого шара из урны, в которой находятся только белые шары.

В ряде случаев вычислить вероятность события оказывается проще, если представить его в виде комбинации более простых событий. Этой цели служат некоторые теоремы теории вероятностей.

Теорема сложения вероятностей: ***вероятность появления одного (безразлично какого) события из нескольких несовместных событий равна сумме их вероятностей.*** Для двух несовместных событий

$$P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B).$$

Сложение вероятностей справедливо не только для двух, но и для любого числа несовместных событий.

Задание 4. Найти вероятность выпадания 1 или 6 при бросании игральной кости.

Решение: События *A* (выпадание 1) и *B (*выпадание 6) являются равновозможными: $P(A) = P(B) = 1/6$, поэтому из (2.4) находим $P(A \text{ или } B) = 1/6 + 1/6 = 1/3$.

Задание 5. В урне находится 50 шаров: 10 белых, 20 черных, 5 красных и 15 синих. Найти вероятность появления белого, или черного, или красного шара при однократной операции изъятия шара из урны.

Решение: Вероятность вынимания белого шара (событие *A)* равна $P(A) = 10/50 = 1/5$, черного шара (событие *B)* — $P(B) = 20/50 = 2/5$ и красного (событие С) — $P(C) = 5/50 = 1/10$. Отсюда по формуле сложения вероятностей получим $P(A \text{ или } B \text{ или } C) = P(A) + P(B) + P(C) = 1/5 + 2/5 + + 1/10= 7/10$.

Если два события единственно возможны и несовместны, то их называют противоположными.

Такие события принято обозначать, например, A и $\overline{A}$.

Сумма вероятностей двух противоположных событий, как следует из теоремы сложения вероятностей, равна единице:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

Примеры

Пусть **задании 5** вынимание белого, или черного, или красного шара будет событием A_1, $P(A_1) = 7/10$. Противоположным событием $\overline{A}_1$ является доставание синего шара. Так как синих шаров 15, а общее количество шаров 50, то получаем $P(\overline{A}_1) = 15/50 = 3/10$ и $P(A_1) + P(\overline{A}_1) = 7/10 + 3/10 = = 1$.

Задание 6. В урне находятся белые, черные и красные шары. Вероятность доставания черного или красного шара равна 0,4. Найти вероятность доставания из урны белого шара.

Решение: Обозначим A событие вынимания черного или красного шара, $P(A) = 0{,}4$; противоположным событием $\overline{A}$ будет изъятие белого шара, тогда на основании (2.5) вероятность этого события $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$.

Систему событий (A_1, A_2, ... A_k) называют полной, если при испытаниях наступит одно и только одно из этих событий. Сумма вероятностей событий, образующих полную систему, равна единице.

В урне имеется 40 шаров: 20 белых, 15 черных и 5 красных. Вероятность появления белого шара (событие A) равна $P(A) = 20/40 = 1/2$, для черного шара (событие B) — $P(B) = 15/40 = 3/8$ и для красного шара (событие C) — $P(C) = 5/40 = 1/8$. В этом случае система событий A_1, A_2, A_3 является полной; можно убедиться, что $P(A) + P(B) + P(C) = 1/2 + 3/8 + + 1/8 = 1$.

Теорема умножения вероятностей: ***вероятность совместного появления независимых событий равна произведению их вероятностей.*** Для двух событий

$$P(A \text{ и } B) = P(A) \bullet P(B).$$

Задание 7. В одной урне находится 5 черных и 10 белых шаров, в другой 3 черных и 17 белых. Найти вероятность того, что при первом вынимании шаров из каждой урны оба шара окажутся: 1) черными; 2) белыми; 3) в первой урне будет вынут черный шар, а во второй — белый; 4) в первой урне будет вынут белый шар, а во второй — черный.

Решение: Вероятность вытаскивания черного шара из первой урны (событие A) равна $P(A) = 5/15 = 1/3$, черного шара из второй урны (событие B) — $P(B) = 3/20$, белого шара из первой урны (событие A') — $P(A') = 10/15 = 2/3$ и белого шара из первой урны (событие B') — $P(B') = 17/20$. Находим вероятность совместного появления двух независимых событий по формуле:

1) $P(A \text{ и } B) = P(A) \bullet P(B) = (1/3)\ (3/20) = 3/60$ — оба шара черные;

2) $P(A' \text{ и } B') = P(A') \bullet P(B') = (2/3)\ (17/20) = 17/30$ — оба шара белые;

3) $P(A' \text{ и } B') = P(A) \bullet P(B') = (1/3)\ (17/20) = 17/60$ — в первой урне будет вынут черный шар, а во второй — белый;

4) $P(A' \text{ и } B) = P(A') \bullet P(B) = (2/3)\ (3/20) = 1/10$ — в первой урне будет вынут белый шар, а во второй — черный.

Все четыре возможных случая A и B, A' и B', A и B', A' и B образуют полную систему событий, поэтому

$$P(A \text{ и } B) + P(A' \text{ и } B') + P(A \text{ и } B') + P(A' \text{ и } B) = 3/60 + 17/30 + 17/60 + 1/10 = 1.$$

Задание 8. Найти вероятность того, что в семье с тремя детьми все трое сыновья. Считать, что вероятность рождения мальчика равна **0,515** и по каждого последующего ребенка не зависит от пола предыдущих детей.

Решение: По теореме умножения вероятностей, $P(A \text{ и } B \text{ и } C) = 0{,}515 \bullet 0{,}515 \bullet 0{,}515 \approx 0{,}14$.

Теорема умножения вероятностей усложняется, если определяется вероятность события, состоящего из совместного появления двух зависимых между собой событий. В том случае, когда событие В выполняется при условии, что событие А имело место, вероятность совместного появления двух этих событий равна

$$P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(B/A),$$

где $P(B/A)$ — *условная вероятность,* т. е. вероятность события *B* при условии, что событие *A* состоялось.

Задание 9. В урне 5 шаров: 3 белых и 2 черных. Найти вероятность того, что последовательно один за другим будут вынуты черный и белый шары.

Решение: Вероятность того, что первым будет изъят черный шар (событие *A*), равна $P(A) = m/n = 2/5$. После удаления черного шара в урне остается 4 шара: 3 белых и 1 черный. В этом случае вероятность вынимания белого шара (событие *B* после выполнения события *A)* равна $P(B/A) = 3/4$. Используя (2.8), получаем

$P(A \text{ и } B) = (2/5) \cdot (3/4) = 3/10.$

Задания

1. В урне Н билетов. Из них М выигрышных. Какова вероятность того, что первый вытянутый билет окажется выигрышным?

Алгоритм решения:

Пусть А – событие, означающее, что первый вытянутый билет выигрышный.

Н – общее количество всех возможных исходов.

М – количество исходов, благоприятствующих наступлению события А.

Р(А) – вероятность наступления события А. Тогда Р(А)=М/Н.

2. Биатлонист стреляет по мишени. Мишень – круг радиуса R см. Биатлонист попадает в мишень с вероятностью 1. Попадание в любую точку равновероятно. Необходимо попасть в круг радиуса r см.

Алгоритм решения:

А - попадание в круг радиуса r см. $S_r=\pi r^2$. $S_R=\pi R^2$. $P(A)=S_r/S_R$

3. Имеется собрание сочинений из Н томов некоего автора. Все Н томов расставляются на книжной полке случайным образом. Какова вероятность, что тома расположатся в порядке возрастания или убывания?

Алгоритм решения:

А – вероятность того, что тома расположатся в порядке возрастания или убывания.

Все тома можно расставить на полке m=H! способами. Только в двух случаях тома расположатся либо в порядке возрастания, либо в порядке убывания. Значит, n=2. Тогда P(A)=n/H!.

4. Имеется собрание сочинений из Н томов некоего автора. На полке умещается только М томов (М меньше Н). Эти тома берут из Н случайным способом. Какова вероятность, что выбранные М томов расположатся в порядке возрастания или убывания?

Алгоритм решения:

А – вероятность того, что выбранные тома расположатся в порядке возрастания или убывания.

М томов из Н томов можно выбрать C_H^M способами. Только в двух случаях тома расположатся либо в порядке возрастания, либо в порядке убывания. Значит, n=2. Тогда $P(A)=2/C_H^M$.

5. Три стрелка стреляют по мишени. Предполагается ,что события попадания в мишень для стрелков независимы и вероятности попадания стрелков в мишень равны p1, p2, p3. Какова вероятность того, что:

1) все три выстрела окажутся успешными;

2) хотя бы одни выстрел окажется успешным;

3) точно один выстрел окажется успешным, два выстрела окажутся успешными?

Алгоритм решения:

1) А – все три выстрела окажутся успешными

P(A)=p1*p2*p3

2) H - хотя бы одни выстрел окажется успешным 1-p_i – вероятность промаха каждого стрелка

P(H) =1-(1-p1)(1-p2)(1-p3)

3) B – только один выстрел окажется успешным

P(B)=p1*(1-p2)*(1-p3)+(1-p1)*p2*(1-p3)+(1-p1)*(1-p2)*p3

C - два выстрела окажутся успешными

P(c)=p1*p2*(1-p3)+(1-p1)*p2*p3+p1*(1-p2)*p3

6. Футболист бьет H раз пенальти. Вероятность забить при одном ударе равна p. Какова вероятность, что будет забито 3 пенальти?

Алгоритм решения:

Пусть A – событие, означающее, что будет забито 3 пенальти. Так вероятность забить при одном пенальти постоянна, то воспользуемся формулой Бернулли.

Тогда P(A)=$C_H^3 \times p^3 \times (1-p)^{H-3}$

7. Случайная величина X задана рядом распределения:

X_i	-3	0	1	4
P_i	P1	P2	P3	P4

Найти математическое ожидание MX, дисперсию DX и среднеквадратическое отклонение σ.

Алгоритм решения:

MX=x1p1+x2p2+x3p3+x4p4

DX=$x1^2p1 + x2^2p2 + x3^2p3 + x4^2p4 - (MX)^2$

$\sigma = \sqrt{DX}$.

Значения параметров по вариантам

	Номер задачи															
	1		**2**		**3**	**4**		**5**			**6**		**7**			
	H	**M**	**R**	**r**	**H**	**H**	**M**	**P1**	**P2**	**P3**	**H**	**p**	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**
1	10	1	5	1	3	5	3	0,1	0,2	0,3	5	0,1	0,1	0,2	0,3	0,4
2	11	2	6	2	4	6	4	0,4	0,5	0,1	4	0,2	0,1	0,2	0,2	0,5
3	12	3	7	3	5	7	5	0,3	0,2	0,4	7	0,3	0,2	0,4	0,1	0,3
4	13	4	8	4	6	8	6	0,9	0,8	0,7	6	0,4	0,3	0,3	0,2	0,2
5	14	5	9	5	7	9	7	0,5	0,6	0,3	5	0,5	0,6	0,1	0,2	0,1
6	15	6	10	6	8	10	8	0,2	0,3	0,4	8	0,6	0,4	0,4	0,1	0,1
7	16	7	11	7	9	11	9	0,2	0,3	0,5	5	0,7	0,2	0,2	0,3	0,3
8	17	8	12	8	10	12	10	0,7	0,8	0,6	6	0,8	0,1	0,2	0,3	0,4
9	18	9	13	9	3	13	3	0,1	0,5	0,7	8	0,9	0,5	0,3	0,1	0,1
10	19	10	14	10	4	14	4	0,2	0,3	0,4	7	0,1	0,1	0,2	0,2	0,5
11	20	1	5	3	5	8	6	0,6	0,7	0,8	9	0,2	0,2	0,2	0,4	0,2
12	21	2	6	4	6	9	7	0,3	0,4	0,5	5	0,3	0,5	0,3	0,1	0,1
13	22	3	7	5	7	10	7	0,3	0,5	0,7	6	0,4	0,6	0,1	0,1	0,2
14	23	4	8	6	8	11	9	0,5	0,1	0,2	7	0,5	0,2	0,1	0,5	0,2
15	24	5	9	7	9	12	10	0,3	0,4	0,9	4	0,6	0,5	0,1	0,2	0,2
16	25	6	10	8	10	13	3	0,2	0,4	0,8	6	0,7	0,1	0,2	0,3	0,4
17	26	7	11	9	3	14	4	0,9	0,8	0,7	7	0,8	0,3	0,2	0,1	0,4
18	27	8	12	10	4	8	4	0,4	0,7	0,6	8	0,9	0,1	0,2	0,3	0,4
19	28	9	13	3	5	9	6	0,2	0,6	0,7	5	0,1	0,6	0,1	0,1	0,2
20	29	10	14	4	6	10	7	0,1	0,6	0,4	6	0,2	0,5	0,3	0,1	0,1
21	30	1	5	3	7	11	8	0,4	0,2	0,6	7	0,3	0,3	0,1	0,2	0,4
22	31	2	6	4	8	12	9	0,1	0,3	0,6	8	0,4	0,1	0,2	0,3	0,4
23	32	3	7	5	9	13	10	0,4	0,6	0,6	5	0,5	0,5	0,2	0,1	0,2
24	33	4	8	6	10	14	3	0,3	0,6	0,1	4	0,6	0,2	0,2	0,1	0,5

25	34	5	9	7	5	9	4	0,6	0,1	0,1	6	0,7	0,1	0,2	0,2	0,5
26	35	6	10	3	6	10	6	0,3	0,7	0,9	7	0,8	0,6	0,2	0,1	0,1
27	36	7	11	4	7	11	7	0,4	0,4	01	4	0,9	0,4	0,1	0,3	0,2
28	37	8	12	5	8	12	8	0,4	0,9	0,8	8	0,1	0,1	0,2	0,2	0,5
29	38	9	13	6	9	13	9	0,3	0,7	0,9	6	0,2	0,1	0,3	0,2	0,4
30	39	10	14	7	10	14	10	0,9	0,7	0,7	7	0,3	0,1	0,2	0,3	0,4

Задания для проверочной работы

1 вариант

1. Вероятность промаха при выстреле по мишени равна 0,24. Какова вероятность попадания?	а) -0,24 б) 0,76 в) 0,86 г) $\frac{1}{0,24}$
2. Вычислите C_5^3, если известно, что $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$	а) 24 б) 12 в) 10
3. Какова вероятность, что извлечённый из урны шар будет одноцветным, если в ней 4 красных, 5 чёрных, 6 в полоску и 7 в клетку шаров?	а) $\frac{9}{13}$ б) $\frac{15}{22}$ в) $\frac{9}{22}$
4. В лотерее 200 билетов. Выигрышных билетов 30. Какова вероятность того, что билет не выигрышный?	а) 0,7 б) 0,17 в) 0,85
5. Какая из данных формул – формула размещений?:	а) $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$; б) $A_n^m = \frac{n!}{(m-n)!}$ в) $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$ г) $A_n^m = \frac{m!}{(n-m)!}$
6. Сократить дробь $\frac{(n-4)!}{(n-6)!}$	а) (n-6)(n-5); б) (n-5)(n-4); в) $\frac{1}{(n-6)\cdot(n-5)}$
7. Вычислите $\frac{P_6 - P_5}{5!}$	а) 30 б) 5 в) 0,2
8. Какова вероятность того, что при подбрасывании игральной кости выпадет чётное число очков?	а) 0,5 б) 0,3 в) 0,2
9. В каких пределах заключено значение вероятности любого события?	а) $0 < P(A) \le 1$ б) $0 \le P(A) < 1$ в) $0 \le P(A) \le 1$ г) $0 < P(A) < 1$
10. Вычислить: $\frac{4!+6!}{6!}$	а) 31; б) 3; в) $\frac{31}{30}$
11. Найти вероятность того, что наугад выбранное число от 1 до 60 кратно 30.	а) $\frac{17}{30}$ б) $\frac{1}{60}$ в) $\frac{1}{30}$ г) 0
12. Сколько различных перестановок можно составить из букв слова «выборка»?	а) 7! б) 1 в) 12

1. Вероятность попадания при выстреле по мишени равна 0,58. Какова вероятность промаха?	а) -0,58 б) 0,42 в) 0,52 г). $\frac{1}{0,58}$
2. Вычислите A_4^3, если известно, что $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$	а) 24 б) 12 в) 10
3. Какова вероятность, что извлечённый из урны шар будет не красным, если в ней 4 красных, 5 чёрных, 6 в полоску и 7 в клетку шаров?	а) $\frac{15}{22}$ б) $\frac{9}{22}$ в) $\frac{18}{22}$
4. В лотерее 400 билетов. Выигрышных билетов 100. Какова вероятность того, что билет не выигрышный?	а). 0,25 б) 0, 75 в) 0,3
5. Какая из данных формул – формула сочетаний?	а) $C_m^n = \frac{n!}{(n-m)!m!}$; б) $C_n^m = \frac{m!}{(m-n)!n!}$ в) $C_n^m = \frac{n!}{(m-n)!\cdot m!}$ г) $C_n^m = \frac{m!}{(m-n)!}$
6. Вычислить $A_6^3 \cdot P_3$	а) 120 б) 720 в) 24
7. Сократить дробь $\frac{(n-6)!}{(n-4)!}$	а) (n-6)(n-5); б) (n-5)(n-4) ; в) $\frac{1}{(n-6)\cdot(n-5)}$
8. Сколько различных размещений из двух элементов можно составить из заданного множества {1,2,3 }?	а) три б) шесть в) ни одного.
9. Вычислите C_5^5	а) 5; б) 1; в) 0.
10. Вероятность какого события равна единице?	а) невозможного б) достоверного в) случайного
11. Какова вероятность, что извлечённый из урны шар будет не красным, если в ней 4 красных, 5 чёрных, 6 в полоску и 7 в клетку шаров?	а) $\frac{9}{13}$ б) $\frac{15}{22}$ в) $\frac{9}{22}$ г) $\frac{18}{22}$
12. Какова вероятность того, что наугад взятая карточка разрезной азбуки будет с гласной буквой?	а) $\frac{1}{33}$ б) $\frac{8}{33}$ в) $\frac{10}{13}$ г) $\frac{10}{33}$

Вопросы для самопроверки

1 Дайте классическое определение вероятности.
2 Что такое случайное событие?
3 Какие события называют достоверными?
4 Какие события называют невозможными?
5 Какие события называют противоположными?
6 Чему равна вероятность полной группы событий?

Практическая работа №25
«Выборка и её представление. Статистическое оценивание»

Цель: формирование умения выполнять первичную обработку выборки, представлять ее графически, вычислять числовые характеристики, использовать метод наименьших квадратов для построения уравнения линейной регрессии.

Вид работы	Образовательный результат	Трудоемкость, ч.	Форма контроля	Отчетный материал
Решение задач	З4, З2, У5, ОК3, ОК4, ОК 5	2	Проверка задания Ответы на контрольные вопросы проверка отчета	Рабочая тетрадь

Обеспечение выполнения работы:

Учебное оборудование:

1. Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Математика».

Информационные источники:

2. Григорьев В.П., Дубинский Ю.А. Элементы высшей математики: учебник для студ. учреждений сред.проф. образования. – 6-е. изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2011. – 320 с.

3. Григорьев В.П., Сабурова Т.Н. Сборник задач по высшей математике: учеб.пособие для студ. учреждений сред. проф. Образования. – М.: Издательский центр «Академия», 2013. – 160 с.

Критерии оценки:

Оценка	Критерии оценки
отлично	работа выполнена полностью, в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала), получены правильные ответы на контрольные вопросы
хорошо	работа выполнена полностью, допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, получены правильные ответы на контрольные вопросы
удовлетворительно	решена правильно 1-я задача, получены правильные ответы на контрольные вопросы
неудовлетворительно	не решена правильно 1-я задача, не получены правильные ответы на контрольные вопросы

Теоретические сведения

Основные задачи математической статистики

Генеральная и выборочная совокупности

Множество всех значений некоторой изучаемой величины или, другими словами, совокупность всех объектов, которая подлежит изучению, носит название *генеральной совокупности*, а специальным образом отобранная группа объектов – *выборочной совокупности* или выборки. Например, партия всех электрических лампочек, которая подлежит изучению, является генеральной совокупностью, а множество лампочек, взятых для обследования, составляет выборочную совокупность.

Число объектов совокупности (генеральной или выборочной) называется *объемом* данной совокупности (выборки). Например, если цех выпустил 2000 деталей, а для обследования отобрано 150 деталей, то объем генеральной совокупности равен 2000 (N = 2000), а объем выборки – 150 (n = 150).

Различают выборки с возвращением и без возвращения. Если после фиксирования значения параметра объект возвращается в генеральную совокупность и, таким образом, он может многократно повторяться в выборке, то говорят о *выборке с возвращением* или *с повторением*. Если же раз отобранный объект обратно не возвращается и он не может больше, чем один раз, повторяться в выборке, то такая выборка называется *выборкой без возвращения* или *без повторения*. Заметим, что когда объем выборки намного меньше объема генеральной совокупности, то различие между выборкой с возвращением и без возвращения практически исчезает.

Говорят, что выборка репрезентативна (представительна), если она достаточно «хорошо» представляет изучаемые признаки генеральной совокупности.

Важным условием обеспечения репрезентативности выборки является соблюдение случайности отбора, т. е. все объекты генеральной совокупности должны иметь равные вероятности попасть в выборку.

Группировка статистических данных. Определение статистических (выборочных) распределений

Для установления закономерностей массовых случайных явлений изучаются статистические данные, т. е. сведения, полученные путем наблюдений или экспериментов о значениях интересующего нас признака. Выше уже были приведены примеры статистических данных. Рассмотрим здесь еще один пример. Экономист, интересующийся тарифным разрядом рабочих некоторого подразделения завода, выбрал документы 100 рабочих и выписал из них последовательность разрядов 5, 1, 4, 5, 4, 3, 6 и т. д. Эта последовательность представляет собой статистические данные, которые подлежат обработке.

Изучение статистических данных обычно начинается с их группировки в порядке возрастания значения признака. Пусть в нашем примере после упорядочения по возрастанию статистических данных мы получили ряд из 100 чисел

1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, ..,,

где 1 повторяется 4 раза, 2 – 6 раз, 3 – 12 раз, 4 – 16 раз (для экономии места мы не выписали этот ряд полностью), 5 – 44 раза и 6 – 18 раз.

Наблюдаемые значения рассматриваемого признака называются вариантами, а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке, называется выборочным или вариационным рядом.

Условимся обозначать через x_1, x_2, ..., x_k значения вариант в данной выборке. Если x_1, x_2, ..., x_k – вариационный ряд, т. е. $x_1 < x_2 < ... < x_k$, то x_1 – это наименьшее значение признака, x_k – наибольшее значение признака в данной выборке, а разность $x_k - x_1$ называется размахом выборки. В нашем примере $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$, $x_6 = 6$.

Пусть из генеральной совокупности отобрана выборка, в которой значение x_1 признака X наблюдалось n_1 раз, значение x_2 – n_2 раз, ..., значение x_k – n_k раз. Если объем выборки равен n, то

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

Числа n_1, n_2, ..., n_k называются частотами, а их отношения к объему выборки, т, е. $w_i = \dfrac{n_i}{n}$ – относительными частотами соответствующих вариант.

Статистическим распределением выборки называется перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот.

Статистическое распределение выборки можно записать в виде таблицы, в первой строке которой указываются значения вариант выборки, во второй строке – значения частот:

x_i	x_1	x_2	…	x_k

n_i	n_1	n_2	…	n_k

или значения относительных частот (которые легко вычисляются по известным частотам и объему выборки):

x_i	x_1	x_2	…	x_k
w_i	w_1	w_2	…	w_k

Так, статистическое распределение выборки рассмотренного выше примера, запишется в виде

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	4	6	12	16	44	18

или

x_i	1	2	3	4	5	6
w_i	0,04	0,06	0,12	0,16	0,44	0,18

Можно свести обе эти характеристики выборки в одну **таблицу 1**:

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	4	6	12	16	44	18
w_i	0,04	0,06	0,12	0,16	0,44	0,18

Пример

Задание 1. Дано статистическое распределение выборки

x_i	2	6	12
n_i	3	10	7

Найти относительные частоты.

Решение: Вычислим объем выборки $n = 3 + 10 + 7 = 20$. Тогда

$$w_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{3}{20} = 0{,}15,\ w_2 = \frac{n_2}{n} = \frac{10}{20} = 0{,}5,\ w_3 = \frac{n_3}{n} = \frac{7}{20} = 0{,}35.$$

Задание 2. Найти вариационный ряд, частоты, относительные частоты для выборки, полученной при измерении электрической емкости двадцати пластин пьезоэлементов в пикофарадах по следующим результатам:

9,9, 11,0, 9,2, 12,0, 8,0, 8,7, 7,0, 11,8, 11,7, 10,3, 11,2, 8,1, 9,5, 11,5, 11,6, 9,7, 10,2, 11,4, 8,6, 10,0.

Решение: Вариационный ряд для данной выборки будет:

x_1 = 7,0, x_2 = 8,0, x_3 = 8,1, x_4 = 8,6, x_5 = 8,7, x_6 = 9,2, x_7 = 9,5, x_8 = 9,7, x_9 = 9,9, x_{10} = 10,0, x_{11} = 10,2, x_{12} = 10,3, x_{13} = 11,0, x_{14} = 11,2, x_{15} = 11,4, x_{16} = 11,5, x_{17} = 11,6, x_{18} = 11,7, x_{19} = 11,8, x_{20} = 12,0.

Здесь каждая варианта встречается по одному разу, следовательно, n_i = 1 для всех i = 1, 2, ..., 20. Равными будут также и относительные частоты, причем $w_i = \frac{1}{20}$.

Теперь мы можем следующим образом уточнить понятие репрезентативности выборки: выборка является репрезентативной, если относительные частоты выборки близки к соответствующим относительным частотам генеральной совокупности (по всем вариантам генеральной совокупности).

Задание 3. Исследовать репрезентативность выборки

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	1	1	3	4	11	5

для генеральной совокупности, заданной **таблицей 1**.

Решение: Вычислим относительные частоты для нашей выборки (обозначим их через w_i'):

$$w_1' = \frac{1}{25} = 0{,}04 = w_1,\ w_2' = \frac{1}{25} = 0{,}04 \approx 0{,}06 = w_2,\ w_3' = \frac{3}{25} = 0{,}12 = w_3,$$

$$w'_4 = \frac{4}{25} = 0{,}16 = w_4,\ w'_5 = \frac{11}{25} = 0{,}44 = w_5,\ w'_6 = \frac{5}{25} = 0{,}2 \approx 0{,}18 = w_6.$$

Из этих подсчетов делаем вывод, что данную выборку можно считать репрезентативной.

При большом числе наблюдений и большом числе вариант, удобно варианты группировать по отдельным интервалам их значений. Для этого шкала интересующего нас признака разделяется на некоторое число интервалов, и вместо отдельных вариант рассматриваются группы значений вариант, попавших в последовательно расположенные интервалы. Число m таких интервалов, как правило, берется в пределах от 10 до 20. Ширина интервалов Δx определяется путем деления размаха выборки $x_k - x_1$ на количество интервалов: $\Delta x = \dfrac{x_k - x_1}{m}$.

В таких случаях составляется статистическое распределение выборки по частотам интервалов (интервальное статистическое распределение выборки). При этом частота интервала равна сумме частот вариант, попавших в данный интервал.

Задание 4. Для выборки *примера* 2 составить таблицу статистического распределения по интервалам, беря число интервалов $m = 10$.

Решение: Вычисляем ширину интервалов:

$$\Delta x = \frac{12{,}0 - 7{,}0}{10} = 0{,}5.$$

Следовательно, имеем интервалы (точнее, - промежутки): [7,0; 7,5], (7,5; 8,0], (8,0; 8,5], (8,5; 9,0], (9,0; 9,5], (9,5; 10,0], (10,0; 10,5], (10,5; 11,0], (11,0; 11,5], (11,5; 12,0]. Используя данные примера 2, получаем следующую таблицу статистического распределения выборки по интервалам:

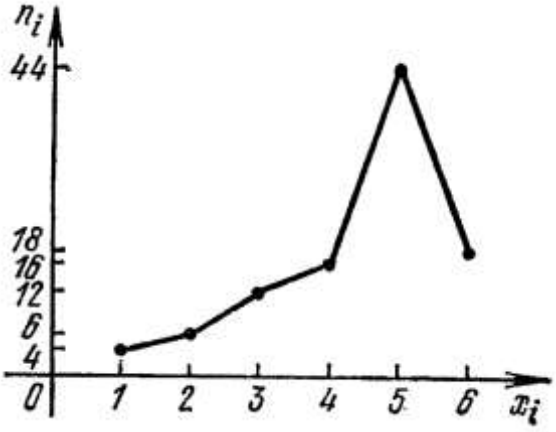
[7,0; 7,5]	1	(9,5; 10,0]	3
(7,5; 8,0]	1	(10,0; 10,5]	2
(8,0; 8,5]	1	(10,5; 11,0]	1
(8,5; 9,0]	2	(11,0; 11,5]	3
(9,0; 9,5]	2	(11,5; 12,0]	4

Геометрическая интерпретация статистических распределений выборки

Если на оси абсцисс прямоугольной системы координат расположить варианты x_i а на оси ординат – соответствующие им частоты, то в плоскости получим точки (x_i; n_i). Соединим точки (x_i; n_i) отрезками прямых. Полученная ломаная линия называется *полигоном частот*.

Задание 5. Построить полигон частот для статистического распределения выборки, заданной **таблицей 1**.

Решение задано рисунком:

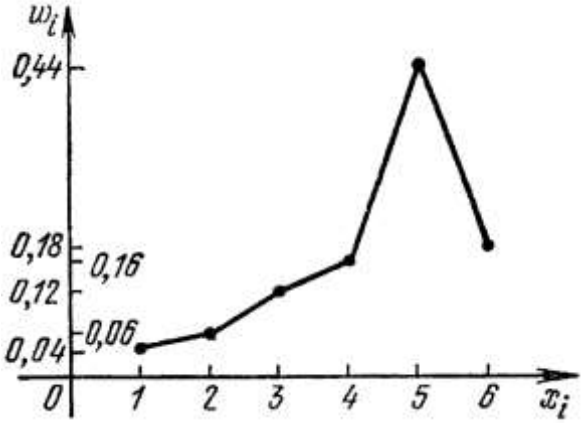


Полигоном относительных частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки (x_1; w_1), (x_2; w_2), ..., (x_k; w_k) построенные в системе координат так, что на оси абсцисс расположены варианты x_i, а на оси ординат – относительные частоты w_i. Так как $w_i = \dfrac{n_i}{n}$, то ординаты точек (x_i; w_i) получаются из ординат точек (x_i; n_i) уменьшением их в n раз. Следовательно, полигон частот будет

представлять полигон относительных частот в системе координат, у которой масштаб на оси ординат увеличен в *n* раз.

Задание 6. Построить полигон относительных частот для статистического распределения выборки, заданной **таблицей 1**.

Решение задано рисунком:



Если статистическое распределение выборки задается в виде последовательности интервалов значений вариант и их частот, то геометрическое изображение дается при помощи гистограммы частот (очевидно, что в этом случае нельзя построить полигон частот).

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, построенных на частичных интервалах с длиной *d* и высотой, равной отношению $\frac{n_i}{d}$ (плотность частоты на данном интервале).

Площадь *i*-го частичного прямоугольника равна $d\frac{n_i}{d} = n_i$. Следовательно, площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, т. е. объему выборки.

Гистограммы относительных частот строятся аналогичным образом, только в качестве высот прямоугольников берется отношение $\frac{w_i}{d}$ (плотность относительной частоты на данном интервале).

Гистограмма относительных частот может быть получена из гистограммы частот сжатием вдоль оси ординат в *n* раз, или увеличением масштаба на оси ординат в *n* раз.

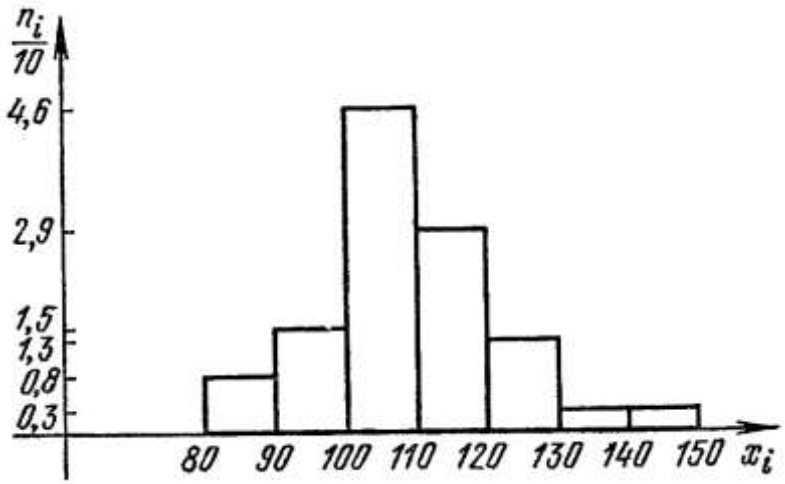
Легко видеть, что площадь гистограммы относительных частот равна единице.

Задание 7. По данным изучения выработки на одного рабочего в отчетном году в процентах по отношению к предыдущему году было составлено интервальное статистическое распределение в виде таблицы для выборки объема *n* = 117, извлеченной из всей совокупности рабочих завода:

Интервал значений варианты (выработка в отчетном году в % по отношению к предыдущему году)	Частота интервала (количество рабочих с данной выработкой)
[80; 90]	8
(90; 100]	15
(100; 110]	46
(110; 120]	29
(120; 130]	13
(130; 140]	3
(140; 150]	3

Построить гистограмму статистического распределения данной выборки.

Решение задано рисунком:



Числовые характеристики выборки

Пусть дана случайная величина X, принимающая значения x_i, $i = 1, ..., k$.

Выборочным средним $\bar{x}_в$ выборки объема n со статистическим распределением

x_i	x_1	x_2	…	x_k
n_i	n_1	n_2	…	n_k

называется «среднее взвешенное» значений признака выборки, т. е.

$$\bar{x}_в = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + ... + x_k n_k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i .$$

Если рассмотренная выборка является генеральной совокупностью объема N со статистическим распределением

x_i	x_1	x_2	…	x_k
N_i	N_1	N_2	…	N_k

то получаем генеральное среднее:

$$\bar{x}_г = \frac{x_1 N_1 + x_2 N_2 + ... + x_k N_k}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} x_i N_i .$$

Вероятность p_i того, что случайная величина X получает значение x_i, будет $p_i = \frac{N_i}{N}$. Вычислим математическое ожидание $\mathbf{M}(X)$ случайной величины X:

$$\mathrm{M}(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_k p_k = x_1 \frac{N_1}{N} + x_2 \frac{N_2}{N} + ... + x_k \frac{N_k}{N} =$$

$$= \frac{x_1 N_1 + x_2 N_2 + ... + x_k N_k}{N} = \bar{x}_г$$

Таким образом,

$$\mathrm{M}(X) = \bar{x}_г .$$

Генеральное среднее (а, следовательно, и математическое ожидание случайной величины) может быть оценено при помощи выборочной средней той или иной выборки. Точность таких оценок зависит от степени репрезентативности данной выборки.

Задание 8. Вычислить генеральное среднее для генеральной совокупности, заданной таблицей:

x_i	1	2	3	4	5	6
N_i	4	6	12	16	44	18

Решение: $\bar{x}_г = \frac{1\cdot 4 + 2\cdot 6 + 3\cdot 12 + 4\cdot 16 + 5\cdot 44 + 6\cdot 18}{100} = 4{,}44.$

Задание 9. Оценить генеральное среднее генеральной совокупности *примера* 1 при помощи выборочного среднего выборки

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	1	1	3	4	11	5

Решение: $\bar{x}_в = \dfrac{1\cdot 1+2\cdot 1+3\cdot 3+4\cdot 4+5\cdot 11+6\cdot 5}{1+1+3+4+11+5} = \dfrac{113}{25} = 4{,}52.$

Следовательно, можно принять $\bar{x}_г \approx \bar{x}_в = 4{,}52$, что близко к истинному значению $\bar{x}_г$.

Задание 10. По данным таблицы оценить среднюю выработку на одного рабочего завода в отчетном году в процентах к предыдущему году (в качестве вариант берутся середины соответствующих интервалов):

Интервал значений варианты (выработка в отчетном году в % по отношению к предыдущему году)	Частота интервала (количество рабочих с данной выработкой)
[80; 90]	8
[90; 100]	15
[100; 110]	46
[110; 120]	29
[120; 130]	13
[130; 140]	3
[140; 150]	3

Решение: Оценим среднюю выработку при помощи выборочного среднего $\bar{x}_в$:

$$\bar{x}_в = \frac{85\cdot 8+95\cdot 15+105\cdot 46+115\cdot 29+125\cdot 13+135\cdot 3+145\cdot 3}{117} =$$

$$= \frac{12735}{117} = 108{,}8(\%).$$

В практических приложениях наряду со среднеарифметическим используются также следующие средние:

среднее геометрическое $g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$;

среднее гармоническое $h = \dfrac{n}{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\ldots+\dfrac{1}{x_n}}$.

При исследовании структуры совокупности используются также такие средние, как мода (варианта, наиболее часто повторяющаяся в изучаемой совокупности) и медиана (величина признака, приходящаяся на середину вариационного ряда).

Выборочной дисперсией $D_в$ выборки называется среднее взвешенное квадратов отклонений значений признака от выборочной средней $\bar{x}_в$.

Если варианты $x_1, x_2, \ldots, x_k$ выборки объема n имеют частоты $n_1, n_2, \ldots, n_k$, то

$$D_в = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_в)^2 n_i}{n}.$$

Если рассматриваемая выборка является генеральной совокупностью, то получаем генеральную дисперсию $D_г$. Пусть X – случайная величина, значения которой предоставлены генеральной совокупностью объема N со статистическим распределением

x_i	x_1	x_2	…	x_k
N_i	N_1	N_2	…	N_k

Тогда

$$D_г = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_в)^2 N_i}{N}.$$

Вычислим дисперсию случайной величины X:

$$\mathrm{D}(X) = \mathrm{M}\,(X - \mathrm{M}\,(X))^2 = \mathrm{M}\,(X - \bar{x}_г)^2.$$

Можно показать, что

$$\mathrm{D}(X) = D_г.$$

Генеральная дисперсия генеральной совокупности (а, следовательно, и дисперсия случайной величины) может быть оценена при помощи выборочной дисперсии той или иной выборки. Точность такой оценки зависит от степени репрезентативности данной выборки.

Напомним, что дисперсия является характеристикой рассеяния значений признака вокруг своего среднего значения.

Часто рассматривается еще величина

$$\sigma_в = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_в)^2 n_i}{n}} = \sqrt{D_в},$$

которая называется средним квадратическим отклонением выборки.

Задание 11. Вычислить генеральную дисперсию генеральной совокупности из примера 1.

Решение: Имеем $\bar{x}_г = 4{,}44$. Тогда

$$D_г = \frac{1}{100}\Big[4(1-4{,}44)^2 + 6(2-4{,}44)^2 + 12(3-4{,}44)^2 +$$

$$+16(4-4{,}44)^2 + 44(5-4{,}44)^2 + 18(6-4{,}44)^2\Big] = \frac{168{,}64}{100} = 1{,}686.$$

Задание 12. Оценить генеральную дисперсию генеральной совокупности из примера 1, при помощи выборочной дисперсии выборки из примера 2.

Решение: Из примера 2 имеем $\bar{x}_в = 4{,}52$. Тогда

$$D_в = \frac{1}{100}\Big[1(1-4{,}52)^2 + 1(2-4{,}52)^2 + 3(3-4{,}52)^2 +$$

$$+4(4-4{,}52)^2 + 11(5-4{,}52)^2 + 5(6-4{,}52)^2\Big] = \frac{40{,}24}{25} = 1{,}609.$$

Следовательно, можно принять $D_г \approx D_в = 1{,}609$, что близко к истинному значению $D_г$ (см. пример 4).

Задание 13. По данным таблицы из примера 3 оценить дисперсию средней выработки на одного рабочего завода и среднее квадратическое отклонение.

Решение: Имеем $\bar{x}_в = 108{,}8$. Тогда

$$D_г \approx D_в = \frac{1}{117}\Big[8(85-108{,}8)^2 + 15(95-108{,}8)^2 + 46(105-108{,}8)^2 +$$

$$+29(115-108{,}8)^2+13(125-108{,}8)^2+3(135-108{,}8)^2+3(145-108{,}8)^2\Big]=$$
$$=\frac{18569{,}48}{117}=158{,}7.$$

Откуда

$$\sigma_в=\sqrt{D_в}\approx 12{,}6.$$

Формулу для дисперсии можно привести к следующему виду, более удобному для вычислений:

$$D_в=\overline{x_в^{\,2}}-(\bar{x}_в)^2.$$

Задания

1. В организации работает 16 сотрудников. Ниже приведены данные опроса этих сотрудников о размере денежных премий (тыс. руб.), полученных ими в течение года: 2,2,1,0,5,1,0,0,0, 2,0,0,2,0,0,1. Составить статистическое распределение выборки, найти моду вариационного ряда и построить полигон частот статистического распределения.

2. Получена выборка измерения массы тела 25 студентов-юношей: 52,3; 56,4; 51,8; 58,7; 55,4;59,3; 441; 61,2; 62,2;62,3; 64,1; 65,7; 69,2; 63,8; 67,2; 69,6; 67,8;66,1;65,6; 71,6; 73,2; 75,9; 78,1; 86,7; 81,8. Составить интервальное статистического распределение выборки с числом частичных интервалов, равным 5, выбрав 40 в качестве нижней границы крайнего левого интервала и 90 в качестве верхней границы крайнего правого интервала, и построить гистограмму частот статистического распределения.

3. В результате измерений некоторой химической величины одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты: 12,13,14,19,22. Найти выборочную среднюю и выборочную дисперсию измерений.

4. В учебной группе — 25 студентов. Ниже приведены оценки, полученные этими студентами на экзамене по математике: 2,2,3,3,3,2,2,5,3,2,3,3,3,3,2,2,2,4,4,2,4,3,3,3,3. Составить статистическое распределение выборки, найти моду вариационного ряда и построить полигон частот статистического распределения.

Вопросы для самоконтроля

1. В чем отличие генеральной совокупности от выборочной?
2. Приведите примеры генеральной совокупности, выборки и исследуемого признака.
3. Какие типы выборок существуют?
4. Для чего исследуются числовые характеристики выборок?
5. Что называется вариационным рядом?
6. Что такое частота выборочных данных и как она определяется?
7. Что представляет собой полигон частот?
8. Что представляет собой гистограмма частот?
9. Что называется выборочным средним? Генеральным средним?
10. Какой смысл имеет математическое ожидание для выборочного распределения?
11. Перечислите средние, которые используются в математической статистике.
12. Что характеризует дисперсия?
13. Как рассчитывается дисперсия для выборочного распределения?
14. Что называется средним квадратическим отклонением? По каким формулам оно вычисляется?

КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ РАБОТ

Оценка «отлично» выставляется, если

- практическая работа выполнена полностью; в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;
- в решении нет математических ошибок (допустимы некоторые неточности, описки, которая не является следствием незнания или непонимания учебного материала).

Отметка «хорошо» ставится, если

- работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);
- допущена одна ошибка или есть два – три недочёта в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работ не являлись специальным объектом проверки).

Отметка «удовлетворительно» ставится, если:

- допущено не более двух ошибок или более двух – трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но обучающийся обладает обязательными умениями по проверяемой теме.

Отметка «неудовлетворительно» ставится, если:

- допущены существенные ошибки, показавшие, что обучающийся не обладает в полной мере обязательными умениями по данной теме.

Преподаватель может повысить отметку за оригинальный ответ на вопрос или оригинальное решение задачи, которые свидетельствуют о высоком уровне математической подготовки обучающегося; за решение более сложной задачи или ответ на более сложный вопрос, предложенные обучающемуся дополнительно после выполнения им каких-либо других заданий.

ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ИСТОЧНИКОВ

Основные источники

1. Баврин И.И. Курс высшей математики. /И.И. Баврин. – М.: Академия; Высшая школа, 2014. – 616 с.
2. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике: учебное пособие для средних проф. учеб. заведений/ Н.В. Богомолов. – М.: Юрайт, 2012. – 495 с.
3. Спирина М.С. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для студ. учреждений сред проф. образования / М.С. Спирина, П.А. Спирин. – 3 изд., стер. – М.: Академия, 2014. – 352 с.
4. Шипачёв В.С. Высшая математика: полный курс: учебник для бакалавров / В.С. Шипачёв; под. Ред. А.Н. Тихонова. – 4-е изд. и доп. – М.: Юрайт, 2013. – 607 с.
5. Шипачёв В.С. Задачи по высшей математике: учеб. пособие для вузов. / В.С. Шипачёв. – М.: Юрайт, 2013. – 304с.

Дополнительные источники

1. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для вузов. / В.Е. Гмурман. – 12-е изд., стер. – М.: Юрайт, 2014. – 479с.
2. Дадаян А.А. Математика / А.А. Дадаян. – 3-е изд. – М.: Форум; Инфра-М, 2011. – 544 с.
3. Дадаян А.А. Математика для педагогических училищ /А.А. Дадаян. – М.: Форум; Инфра-М, 2011. – 512 с.
4. Касьянов В.И. Руководство к решению задач по высшей математике: учебное пособие / В.И. Касьянов. – М.: Юрайт, 2012. – 546 с.
5. Лапчик М.П. Элементы численных методов /Лапчик М.П. – М.: Академия, 2012.
6. Пехлецкий И.Д. Математика: учебник для студ. учреждений сред проф. образования / И.Д. Пехлецкий. – 11-е изд., перераб. и доп. – М.: Академия. 2014. – 320 с.

Интернет-ресурсы

1. http://www.ru.wikipedia.org Свободная универсальная энциклопедия, написанная на русском языке.
2. http://www.Allmath.ru - это математический портал, на котором вы найдете любой материал по математическим дисциплинам.
3. http://www.math.ru/ На сайте вы найдёте книги, видео-лекции, занимательные математические факты, различные по уровню и тематике задачи, отдельные истории из жизни учёных — всё то, что поможет окунуться в удивительный и увлекательный мир математики.
4. http://www.bymath.net Этот сайт – средняя математическая интернет-школа, в которой вы можете учиться, не выходя из дому. В отличие от других сайтов здесь содержатся все необходимые материалы по элементарной математике в полном объёме.
5. http://free-math.ru/ Любите математику! Интересуйтесь математикой! Уважайте математику! Мы собираем для Вас только самое полезное и интересное. Учитесь с нами!
6. www. window. edu. ru Единое окно доступа к образовательным ресурсам Российской Федерации.
7. http://www.school.edu.ru/catalog.asp Каталог образовательный ресурсов на федеральном «Российском общеобразовательном портале».